现代物理基础丛书 88

群论及其在粒子物理中的应用

姜志进　编著



现代物理基础丛书　88

群论及其在粒子物理中的应用

姜志进　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

全书共六章，较系统地介绍了从量子力学到量子场论所用到的基本的群论知识，主要包括典型群，如幺正群、正交群与洛伦兹群等的定义与性质；$SU(l)$群不可约表示直积的杨图分解；$SO(3)$群及其表示与角动量耦合中的CG系数；$su(l)$李代数及其常用的一些代数关系；$A_1[SU(2)]$、$A_2[SU(3)]$与$A_3[SU(4)]$李代数表示的单权系及其本征态的夸克表示与强子的味道对称性等.

书中的文字描述力求物理化，数学推导过程较详细，易读易懂. 在内容安排上，以物理需要为导向，注重解决实际的物理问题，具有较强的实用性. 本书可作为理论物理及相关专业研究生的教材，也可作为相关专业科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

群论及其在粒子物理中的应用/姜志进编著. —北京：科学出版社, 2020.3
(现代物理基础丛书; 88)
ISBN 978-7-03-063777-2

Ⅰ. ①群…　Ⅱ. ①姜…　Ⅲ. ①群论-应用-粒子物理学　Ⅳ. ①O572.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 281429 号

责任编辑：陈艳峰　钱　俊／责任校对：杨　然
责任印制：吴兆东／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2020 年 3 月第　一　版　开本: 720 × 1000　1/16
2020 年 3 月第一次印刷　印张: 19　3/4
字数: 398 000

定价: 138.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

群论是近世代数的一个重要分支, 是物理系统对称性研究的一个重要的数学工具, 在物理学的诸多领域, 如粒子物理、核物理、固体物理及天体物理中都有着广泛的应用. 群论是理论物理及相关专业研究生的必修课.

群论所涵盖的内容非常丰富, 按所包含元素的数目, 群可分为两大分支：一个是有限群, 另一个是无限群. 前者的元素数目有限, 后者的无限. 有限群论是群论的基础, 群论的许多概念与结论都出自于有限群. 物理上常用的有限群有点群、空间群与置换群等, 前两者在晶体的对称性分析中有着重要的应用, 而置换群是历史上最早被研究的一种群, 在物理与群论的研究中经常用到, 是一重要的有限群. 无限群有离散群与连续群之分, 前者元素可列或可数, 如整数群, 后者元素不可列或不可数, 如李群. 李群是一种理论上研究得最清楚的连续群, 在物理上有着重要的应用. 无论是有限群还是无限群, 它们的理论体系都非常庞大, 在有限的授课时间里, 本书将集中于群论及其在粒子物理中的应用, 介绍从量子力学到量子场论所用到的基本的群论知识.

群论中的数学概念多、数学术语多、数学推导多. 为了便于理解、掌握其内容, 本书在文字描述方面尽量采用物理工作者熟悉的语言, 数学推导力求详细, 并紧密结合物理需要, 注重解决实际的物理问题, 以期所编著的内容易读易懂且实用, 使得本科及以上物理专业的读者即使自学也不会感到太困难.

在本书的编著过程中, 作者主要参考了如下书籍：陶瑞宝编著的《物理学中的群论》(高等教育出版社, 2011); 马中骐著的《物理学中的群论》(科学出版社, 2006); 韩其智、孙洪洲编著的《群论》(北京大学出版社, 1987); 高崇寿著的《群论及其在粒子物理学中的应用》(高等教育出版社, 1992); 李子平、廖理几编著的《群论及其在物理学中的应用》(新疆人民出版社, 1988); 杨炳麟著 (刘健恒译) 的《量子场论导引》(科学出版社, 1988); 姜志进编著的《量子场论导论 —— 电磁作用的阿贝尔规范理论》(科学出版社, 2016) 等.

本书中的外国人名, 在正文中第一次出现时, 其汉译名后面都标有外文名, 为简洁起见, 同一人名再次出现时, 将只用其汉译名, 外文名将不再标出. 部分专业词汇也做同样的处理.

本书是作者根据自己多年的讲稿编写而成, 虽经多次修改, 但不当之处仍在所难免, 敬请读者不吝批评指正.

最后借此机会, 向那些在本书的文字输入方面给予帮助并提出宝贵修改意见的

同学致以深深的谢意！向为本书的顺利出版而付出辛勤劳动的科学出版社钱俊编辑等致以深深的谢意！向始终如一给予我理解、支持与帮助的爱人巩红晓女士致以深深的谢意！

姜志进

2019 年 9 月于上海

目 录

第 1 章　群的基本知识

群是一种满足一定代数运算规则的集合, 是群论研究的主体. 本章将从集合与代数运算开始, 介绍抽象群的基本知识, 如群的定义与举例、子群与陪集、正规子群与商群、群的同构与同态等. 本章中各重要知识点都配有例题作以具体的说明, 对群的各种性质与相关结论都给出了较详细的证明.

1.1　集合与代数运算

集合与代数运算是两个广为人们熟悉的概念, 它们构成群的基本要素, 是群论的基础. 作为过渡, 这里先对二者做一简单的回顾.

1.1.1　集合与元素

有限个或无限个具有一定固有属性对象的总体叫做一个集合 (set), 通常用大写字母, 如 $A, B, C, \cdots$ 表示. 集合中的对象叫做它的元素 (element), 通常用小写字母, 如 $a, b, c, \cdots$ 表示. 由全体实数构成的集合通常用 R (real) 表示, 由全体整数构成的集合用 I (integer) 表示, 由全体复数构成的集合用 C (complex) 表示. 若元素 a 属于集合 A, 记作 $a \in A$; 若 a 不属于 A, 记作 $a \notin A$.

设有两个集合 A 与 B, 若对于任意的元素 a, 有关系 $a \in A \Leftrightarrow a \in B$, 即 A、B 两集合中的元素一一对应且相同, 则两集合完全相等, 记作 $A = B$. 一个元素也没有的集合, 称为空集, 记作 0 . 符合某种属性或条件 $p(x)$ 的集合 A, 记作 $A = \{x \,| p(x)\}$, 如

$$Z_2 = \{1, -1\} = \left\{x \,\middle|\, x \in R \text{ 且 } x^2 = 1\right\}, \tag{1.1}$$

这里的 $p(x) = x \in R$ 且 $x^2 = 1$.

1.1.2　子集

设有集合 A 与 B, 如果

$$a \in A \Rightarrow a \in B, \tag{1.2}$$

则称 A 是 B 的子集 (subset), 记作 $A \subset B$, 读作 A 包含于 B, 或 B 包含 A, 其文氏 (Venn) 图如图 1.1 所示.

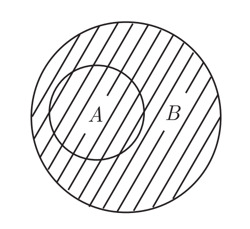


图 1.1　$A \subset B$ 的文氏图

1.1.3　交集

设有集合 C, 它是由 A 与 B 两集合中的公共元素组成的, 即

$$C = \left\{ x \middle| x \in A \text{ 且 } x \in B \right\}, \tag{1.3}$$

则称 C 是 A 与 B 两集合的交集 (intersection), 记作 $C = A \cap B$, 如图 1.2 所示.

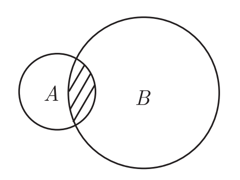


图 1.2　交集 $A \cap B$ 的文氏图

1.1.4　差集

设有集合 C, 它是由仅属于 A 但不属于集合 B 中的元素组成的, 即

$$C = \left\{ x \middle| x \in A \text{ 但 } x \notin B \right\}, \tag{1.4}$$

则称 C 为 A 与 B 的差集 (difference set), 记作 $C = A - B$, 如图 1.3 所示.

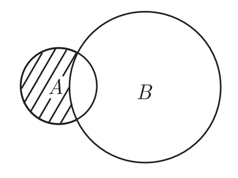


图 1.3　差集 $A - B$ 的文氏图

1.1.5　和集或并集

设有集合 C, 它是由 A 与 B 两集合中的元素组成的, 即

$$C = \left\{ x \middle| x \in A \text{ 或 } x \in B \right\}, \tag{1.5}$$

则称集合 C 是 A 与 B 的和集 (sum set) 或并集 (union set), 记作 $C = A \cup B$, 如图 1.4 所示.

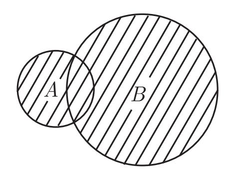


图 1.4 和集或并集 $A \cup B$ 的文氏图

1.1.6 直和集

若集合 C 是另两个不相交的集合 A 与 B 的和集, 即

$$C = \left\{ x \left| x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } A \cap B = 0 \right. \right\}, \tag{1.6}$$

则称 C 为 A 与 B 的直和集 (direct sum set), 记为 $C = A \oplus B$, 如图 1.5 所示.

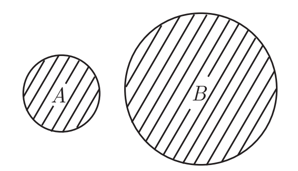


图 1.5 直和集 $A \oplus B$ 的文氏图

对于 n 个不相交的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 其直和集为

$$\begin{aligned} A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n &= \sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} A_i \\ &= \left\{ x \left| x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \cdots \text{ 或 } x \in A_n, \text{ 且 } A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 不相交 } \right. \right\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.1.7 直积集

设有集合 C, 若它的元素是一个有序对 (a, b), 其中第 1 个元素 $a \in A$, 第 2 个元素 $b \in B$, 即

$$C = \{ (a, b) \left| a \in A, b \in B \right. \}, \tag{1.8}$$

则称 C 为 A 与 B 的直积集 (direct product set), 记为 $C = A \otimes B$, 对于 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 其直积集可推广为

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n = \prod_{i=1}^{n}{}^{\otimes} A_i = \{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \left| a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n \right. \}. \tag{1.9}$$

1.1.8 代数运算

设 G 是一个非空集合, 如果存在一个运算规则, 使得 G 中的任意两个元素 g_k、g_l 按此规则运算后恒对应于 G 中的唯一确定的元素 g_m, 则称此运算规则为 G 的一个代数运算 (algebraic operation).

例如, 实数域 R 的加法、乘法都是 R 的代数运算. 显然, 除法不构成 R 的代数运算, 因为 0 除任意实数不再处在实数域 R.

再比如, 若假设 G 是所有 l 阶非奇异矩阵的集合, 即 $\det g \neq 0\,(g \in G)$, 则矩阵的乘法构成 G 的一个代数运算, 因为任意两非奇异矩阵的乘积仍为非奇异矩阵. 但矩阵的加法不是 G 的代数运算, 因为两非奇异矩阵之和不一定是非奇异矩阵.

1.1.9 置换

这里, 作为举例与后面的应用, 讨论一种具体的代数运算——置换 (permutation).

置换在物理学中经常用到. 例如, 量子力学中曾讨论过全同粒子波函数. 所谓全同粒子指的是自旋、电荷、质量等味道量子数都完全相同的粒子. 如所有的电子是全同粒子, 所有的质子也是全同粒子等. 由量子力学中的全同性原理知, 由全同粒子组成的多粒子系统, 任意两粒子的交换不会引起物理状态的变化. 由此可推知, 由全同玻色子组成的多粒子系统, 其波函数对于任意两相邻粒子的交换是对称的; 由全同费米子组成的多粒子系统, 其波函数对于任意两相邻粒子的交换是反对称的. 这里所说的两粒子的交换就是一种置换.

一般地, 设有 n 个物体, 将它们编号 $1, 2, \cdots, n$, 这 n 个数共有 $n!$ 种排列方式, 设其中一种的排列方式为

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \tag{1.10}$$

其中, $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 分别取 $1, 2, \cdots, n$ 中的一个数, 且每一数字只能取一次. 将上式排列与基本排列

$$1, 2, \cdots, n \tag{1.11}$$

相比较知, 从基本排列 (1.11) 到排列 (1.10), 其实是作代换 $1 \Rightarrow p_1$, $2 \Rightarrow p_2, \cdots$, $n \Rightarrow p_n$. 通常称这种代换为置换, 记作

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

可见置换就是 n 个元素的集合到自身的一个 1-1 映射, 例如置换

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.13a}$$

代表数字代换 $1 \Rightarrow 4, 2 \Rightarrow 1, 3 \Rightarrow 3, 4 \Rightarrow 5, 5 \Rightarrow 2$. 在置换 p 中, 只要上下两个符号 i 与 p_i 对齐就行了, 其次序可作任意变动而不影响置换结果, 如

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1.13b}$$

另取 n 个数的置换

$$p' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p'_1 & p'_2 & \cdots & p'_n \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

它与置换 (1.12) 的乘积 pp' 是 p 与 p' 两置换的联合置换, 方法是由 p' 到 p 依次作置换, 即

$$\begin{aligned} pp' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p'_1 & p'_2 & \cdots & p'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 & \cdots & p'_n \\ p_{p'_1} & p_{p'_2} & \cdots & p_{p'_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p'_1 & p'_2 & \cdots & p'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_{p'_1} & p_{p'_2} & \cdots & p_{p'_n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以两置换的联合置换也是一种置换, 按代数运算的定义, 置换是一种代数运算. 又

$$\begin{aligned} p'p &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p'_1 & p'_2 & \cdots & p'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p'_{p_1} & p'_{p_2} & \cdots & p'_{p_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p'_{p_1} & p'_{p_2} & \cdots & p'_{p_n} \end{pmatrix} \neq pp', \end{aligned}$$

所以一般来说, 两置换乘积的次序是不可交换的. 如假设

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

它与 (1.13a) 置换 q 的乘积或联合置换为

$$qs = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
sq &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \neq qs.
\end{aligned}
$$

置换 (1.12) 的逆是将排列 (1.10) 变成基本排列 (1.11), 记作 p^{-1}, 则

$$
p^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.
$$

由某排列到自身的置换称为恒等置换, 记作 p_e, 则

$$
\begin{aligned}
p_e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \\
&= pp^{-1} = p^{-1}p.
\end{aligned}
$$

显然恒等置换所得的排列为一基本排列.

1.2　群 与 举 例

1.2.1　群的定义

设在一个非空集合 G 上规定了一种代数运算, 通常统称为 “乘法”, 设 g_k、$g_l \in G$, 两者相乘记为 $g_k g_l$, 如果这样规定的乘法使集合 G 满足如下四个条件, 则称集合 G 为一个群 (group), 这四个条件是

(1) 封闭性满足：如果 g_k、$g_l \in G$, 则有 $g_k g_l = g_m \in G$.

(2) 结合律成立：即 $(g_k g_l)\, g_m = g_k\, (g_l g_m)$.

(3) 单位元存在：若 g_k 是 G 中的任一元素, 则在 G 中一定存在一个元素 g_0, 使得

$$g_0 g_k = g_k g_0 = g_k. \tag{1.16}$$

(注：这里和以后, 在带角标的元素中, 角标为 0 的元素通常代表单位元).

(4) 逆元素存在：即对于 G 中的每一元素 g_k, 都有其逆元素 $g_k^{-1} \in G$ 存在, 使得

$$g_k g_k^{-1} = g_k^{-1} g_k = g_0. \tag{1.17}$$

可见, 群是一种特殊的集合, 该集合在所规定的代数运算下满足如上的四个条件. 同一个元素集合, 若所定义的代数运算不同, 则构成的群也不相同.

对于群 G, 若群元素的个数为有限的, 则称 G 为有限群. 有限群所包含的元素的个数称为群的阶. 元素的数目为无穷的群, 称为无限群.

若群 G 中的元素满足交换律, 即对于 $g_k, g_l \in G$, 有 $g_k g_l = g_l g_k$, 则称 G 为交换群或阿贝尔 (Abel) 群. 对于二阶群, 群元素只有两个, 一个是单位元, 另一个是非单位元. 由定义 (1.16) 式知, 单位元与所有群元素都对易, 所以二阶群一定是阿贝尔群, 这是所有二阶群的共有特点.

1.2.2 群举例

例 1.1 全体整数 I, 全体实数 R, 全体复数 C, 对于加法构成群, 它们都是无限群, 且都是阿贝尔群. 其中单位元为 0, 元素 g 的逆元素为 $-g$.

对于普通乘法, 三者将不再构成群. 因为若取该情况下的单位元为 1, 则 0 的逆 0^{-1} 将变得没意义, 整数的逆不一定是整数.

例 1.2 l 阶非奇异矩阵 A 的全体, 即 $\det A \neq 0$ 矩阵的全体, 按矩阵的乘法构成一个群, 其中的单位元是单位矩阵, 且由于是非奇异矩阵, 每一矩阵都有其逆存在. 由于这类群的群元素都是矩阵, 元素间不可交换, 所以这类群是非阿贝尔群.

满足 $\det A = \pm 1$ 的 l 阶矩阵 A 的全体, 按矩阵的乘法也构成一群. 其中, 满足 $\det A = +1$ 的一支仍构成一个群, 但满足 $\det A = -1$ 的一支不构成群, 因为

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = (-1)(-1) = +1,$$

不满足封闭性要求.

例 1.3 使一平面等边三角形保持空间取向不变的转动操作, 构成集合

$$D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}, \tag{1.18}$$

如图 1.6 所示, 角标 3 表示操作对象是三角形.

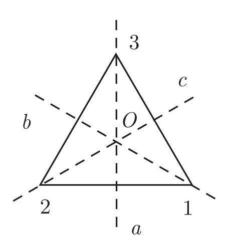


图 1.6　平面等边三角形及其三个对称轴 a、b、c

该集合共有 6 个元素, 其中 e 表示恒等操作或不操作. a、b、c 分别为绕如图 1.6 所示的对称轴旋转 180° 的操作. d、f 分别为绕通过中心 O 并垂直于三角形平面的轴顺时针旋转 120° 与 240° 的操作.

若定义两次操作的乘积为相继施行两次操作的结果, 则 D_3 中的 6 个元素的乘积结果如表 1.1 所示.

表 1.1　D_3 群的乘法表

		右乘因子					
		e	a	b	c	d	f
	e	e	a	b	c	d	f
左	a	a	e	d	f	b	c
乘	b	b	f	e	d	c	a
因	c	c	d	f	e	a	b
子	d	d	c	a	b	f	e
	f	f	b	c	a	e	d

表中第 1 行列出了群的所有元素, 是先施行的操作, 处在两元素乘积的右侧. 第 1 列与第 1 行的次序一样, 也列出了群的所有元素, 是后施行的操作, 处在两元素乘积的左侧. 表中其余各行、列的元素都是用第 1 列的各元素依次左乘第 1 行的各元素得到的. 如 ab, a 取自第 1 列, b 取自第 1 行. 先对图 1.6 完成 b 操作, 得图 1.7(a). 接着对该图再作 a 操作, 得图 1.7(b). 对图 1.6 作 d 操作, 得图 1.7(c), 可见 $ab = d$. 这就是表 1.1 中第 3 行、第 4 列元素 d 的由来. 同样的方法可求得其他元素.

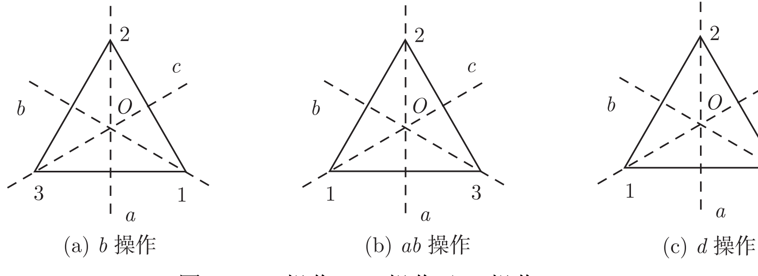


图 1.7　b 操作、ab 操作及 d 操作, $ab = d$

表 1.1 表明, 集合 D_3 满足群定义的封闭性、单位元及逆元素三条件, 另外操作也满足结合律, 所以 D_3 对于前面定义的乘法运算构成群, 其阶数为 $n=6$. 由表 1.1 还知, 该群中元素的乘积不可对易, 如 $ab=d\neq ba=f$, 所以 D_3 是一种非阿贝尔群.

表 1.1 称为 D_3 群的乘法表. 在该表中, 乘积得到的每一行或每一列包含了群的全体元素, 且每一个元素在任一行或任一列中只出现一次, 这是所有群乘法表的共有特点.

在后面的相关讨论中, 作为举例将经常用到 D_3 群.

例 1.4 三个数的所有置换共有 6 个元素

$$\begin{aligned}&p_e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad p_a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad p_b=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\\&p_c=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad p_d=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad p_f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.19}$$

它们按置换的乘法构成 6 阶置换群, 记作 S_3. 角标 3 代表参与置换的数字为三个, 所以 S_3 亦称为 3 元置换群, 其乘法表只需将表 1.1 中的元素作如下代换

$$e\Rightarrow p_e,\ a\Rightarrow p_a,\ b\Rightarrow p_b,\ c\Rightarrow p_c,\ d\Rightarrow p_d,\ f\Rightarrow p_f$$

即可, 这也是 (1.19) 式各元素下角标取法的原因所在.

进一步, n 个数的所有置换有 $n!$ 个元素, 按置换的乘法构成群, 称为 n 元置换群, 记作 S_n. 其具体性质在后面的第 3 章中将做专门的讨论.

例 1.5 量子力学曾引入过泡利 (Pauli) 矩阵, 它们具有形式

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\tag{1.20}$$

满足关系

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+\mathrm{i}\sum_k\varepsilon_{ijk}\sigma_k\quad(i、j、k=1,2,3).\tag{1.21}$$

按这种乘法, 如下的 8 个元素的集合

$$\Sigma=\{\pm1,\pm\mathrm{i}\sigma_1,\pm\mathrm{i}\sigma_2,\pm\mathrm{i}\sigma_3\}\tag{1.22}$$

构成 8 阶群, 这里称为泡利矩阵群或 Σ 群, 其中单位元为 1, $\mathrm{i}\sigma_i$ 的逆元素为 $-\mathrm{i}\sigma_i$, 其乘法表如表 1.2 所示.

表 1.2　Σ 群的乘法表

	右乘因子							
	1	-1	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$
左乘因子 1	1	-1	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$
-1	-1	1	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$
$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_2$	1	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_2$
$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	1	$\mathrm{i}\sigma_1$
$\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_1$	-1	$\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	1
$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_1$	1	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_2$
$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	1	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_3$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_1$
$-\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	1	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_1$	-1

例 1.6　量子场论中曾引入过狄拉克 (Dirac) 矩阵, 它们取形式

$$\gamma^0=\gamma_0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

其中 I 为 2×2 单位矩阵, $\boldsymbol{\sigma}$ 为如 (1.20) 式所示的泡利矩阵. γ_0 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 构成四维矢量

$$\gamma^\mu=(\gamma_0,\boldsymbol{\gamma}),\gamma_\mu=(\gamma_0,-\boldsymbol{\gamma})\quad(\mu,\nu=0,1,2,3), \tag{1.24}$$

满足关系

$$\begin{aligned}&\gamma_0^2=1,\quad \gamma_i^2=-1\quad(i=1,2,3),\\&\gamma_0^\dagger=\gamma_0=\gamma_0^{-1},\quad \gamma_i^\dagger=-\gamma_i=\gamma_i^{-1},\\&\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu},\\&\gamma_\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma_\mu=2g_\mu^\nu=2\delta_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{1.25}$$

其中

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad g_\mu^\nu=\delta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

分别为二阶四维度规与单位张量. 由 (1.25) 式知, 狄拉克矩阵是反对易的, 且 γ_0 是厄米、幺正的, γ_i 是反厄米、幺正的.

考虑所有 γ 矩阵乘积的集合. 如果乘积中包含两个相同的 γ 矩阵, 则通过反对易关系 (1.25) 式可将它们移到一起成为 1(或 -1). 因此, 各乘积项不应含有相同矩阵的乘积. 这样, 乘积项中最多只有 4 个不同的 γ 矩阵的乘积, 通常取成

$$\gamma_5=\gamma^5=-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\mathrm{i}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

称为手征算符, 显然

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 = \gamma_5^{-1}, \quad \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0, \tag{1.28}$$

即 γ_5 是厄米、幺正的, 与各 γ 矩阵反对易. 三个不同 γ 矩阵的乘积项为 $\gamma_\mu\gamma_5$, 两个不同 γ 矩阵的乘积项为 $\gamma_\mu\gamma_\nu$, 一个 γ 矩阵项为 γ_μ, 0 个矩阵项为 1, 再考虑到乘积项前面的 $\pm$ 号, 所有 γ 矩阵乘积的集合 $\varGamma$ 为

$$\varGamma = \begin{cases} \pm 1 & (2\text{ 个元素}), \\ \pm\gamma_\mu & (8\text{ 个元素}), \\ \pm\gamma_\mu\gamma_\nu & (12\text{ 个元素}), \\ \pm\gamma_5\gamma_\mu & (8\text{ 个元素}), \\ \pm\gamma_5 & (2\text{ 个元素}), \end{cases} \tag{1.29}$$

共有 32 个元素, 这样的一个集合构成一个群, 因为

(1) 单位元存在, 为 1.

(2) 封闭性满足, 因为集合 $\varGamma$ 包含了从 $0 \Rightarrow 4$ 个所有不同 γ 矩阵的乘积项, 所以该集合中任意两元素的乘积都应处在该集合中.

(3) 逆元素存在, 如 γ_0 与 γ_5 的逆元素就是它们本身, $\gamma_i\,(i=1,2,3)$ 的逆元素是 $-\gamma_i$, $\gamma_0\gamma_i$、$\gamma_5\gamma_i$ 的逆元素为其本身, $\gamma_i\gamma_j$ 与 $\gamma_5\gamma_0$ 的逆分别是 $-\gamma_i\gamma_j$ 与 $-\gamma_5\gamma_0$.

(4) 矩阵的乘积满足结合律.

所以集合 $\varGamma$ 构成一个 32 阶有限群, 称为狄拉克矩阵群或 $\varGamma$ 群.

1.2.3 群的基本性质

由群的定义可推知群的一些基本性质, 这些基本性质可概括为如下五个定理.

定理 1.1 群 G 中任意 m 个元素的乘积, 其结果与元素的组合方式无关.

由于群元素的乘积满足结合律, 所以该定理显然是成立的. 如 $m=4$ 时,

$$abcd = (ab)(cd) = a(bc)d = [(ab)c]d = \cdots. \tag{1.30}$$

对于阿贝尔群, 这个乘积还与群元素的次序无关.

定理 1.2 群 G 中的单位元 g_0 是唯一的.

证明 假设群 G 中的单位元不唯一, 还有 g_0', 则对于群中的任一元素 $g \in G$, 有

$$g_0'g = gg_0' = g.$$

取 $g = g_0$, 得

$$g_0'g_0 = g_0g_0' = g_0. \tag{1.31}$$

又因 g_0 是单位元, 所以

$$g_0' g_0 = g_0 g_0' = g_0'. \tag{1.32}$$

两式表明

$$g_0' = g_0, \tag{1.33}$$

定理成立.

定理 1.3 群 G 中的每个元素 g 的逆 g^{-1} 是唯一的.

证明 假设元素 g 的逆元素不唯一, 还有 g'^{-1}, 则有

$$gg'^{-1} = g'^{-1}g = g_0,$$

这样

$$g'^{-1} = g_0 g'^{-1} = g^{-1}\left(gg'^{-1}\right) = g^{-1}g_0 = g^{-1}, \tag{1.34}$$

所以 g 的逆元素 g^{-1} 是唯一的. 由于 $gg^{-1} = g^{-1}g = g_0$, 所以 g 与 g^{-1} 互为逆元素.

定理 1.4 单位元 g_0 的逆元素是其自身.

证明 假设 g_0 的逆元素为 g_0^{-1}, 则有

$$g_0 g_0^{-1} = g_0^{-1} g_0 = g_0. \tag{1.35}$$

另, 对于群中任一元素 $g \in G$, 有

$$g_0 g = g g_0 = g,$$

取 $g = g_0^{-1}$, 得

$$g_0 g_0^{-1} = g_0^{-1} g_0 = g_0^{-1}, \tag{1.36}$$

与 (1.35) 式相比较知 $g_0^{-1} = g_0$, 定理得证.

定理 1.5——群的重排定理 设 g 为群 G 中的某一元素, 则序列

$$gg_i \quad (g_i \in G, i = 1, 2, \cdots), \tag{1.37}$$

包含群 G 中的所有元素, 且每一元素只包含一次.

证明 (1) 群 G 中的任意元素 g_j 属于序列 (1.37).

设 g^{-1} 为 g 的逆元素, 则由群的封闭性知

$$g^{-1}g_j = g_i \in G.$$

因此

$$gg_i = g\left(g^{-1}g_j\right) = g_j \in \text{序列}\,(1.37)\,. \tag{1.38}$$

(2) 群 G 中的元素在序列 (1.37) 中只出现一次.

假设某元素, 如 g_j 在序列 (1.37) 中出现两次, 即

$$gg_k = g_j, \quad gg_m = g_j,$$

其中 $g_k \neq g_m$. 用 g^{-1} 左乘以上两式得

$$g_k = g^{-1}g_j,\ g_m = g^{-1}g_j, \quad \Rightarrow g_k = g_m, \tag{1.39}$$

与 $g_k \neq g_m$ 的假设相矛盾, 所以 g_j 在序列 (1.37) 中不能出现两次及以上, 只能出现一次. 这样, 用群中任一元素左乘或右乘群的所有元素所得的新集合, 除元素的排列次序不同外, 与原来的群完全相同. 所以定理 1.5 又称为群的重排定理.

1.3 子群与陪集

1.3.1 子群

设 H 是群 G 的一个非空子集, 若对于群 G 同样的乘法运算, H 也构成一个群, 则称 H 为群 G 的子群 (subgroup), 记作 $H \subset G$.

由于 H 是一个群, 它应包含单位元, 而单位元是唯一的, 且在 H 与 G 中规定了同样的代数运算规则, 所以子群 H 的单位元就是 G 的单位元. 容易证明, H 是 G 的子群的充要条件是:

(1) 若 h_i、$h_j \in H$, 则 $h_ih_j \in H$.

(2) 若 $h \in H$, 则 $h^{-1} \in H$.

条件 (1) 是 H 的封闭性所要求的. 条件 (2) 保证了 H 中的每一元素有其逆存在, 且包含元素 $hh^{-1} = h_0 = g_0$, 即包含单位元, 因此 H 构成一个群.

例 1.7 群 G 本身及其单位元 g_0 都是 G 的子群, 每个群都有这两个子群, 称为显然子群或平庸子群. 群 G 的非显然子群称为固有子群 (proper subgroup). 若无特别说明, 一般所说的子群指的都是固有子群.

例 1.8 实数中的一切整数对于加法构成的整数群 I 是实数群 R 的子群.

例 1.9 由表 1.1 的 D_3 群乘法表知, D_3 群有 4 个子群

$$H_1 = \{e, a\}\,, \quad H_2 = \{e, b\}\,, \quad H_3 = \{e, c\}\,, \quad H_4 = \{e, d, f\}\,. \tag{1.40}$$

前三者是二阶群, 最后一个是三阶群且是一阿贝尔群.

例 1.10　由 (1.21) 式或表 1.2 知, (1.22) 式的 Σ 群有子群

$$\Sigma_i = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\sigma_i\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad Z_2 = \{\pm 1\}, \tag{1.41}$$

前三者是四阶阿贝尔群, 最后一个是二阶群.

1.3.2　循环群

对于有限群 G 中的任一元素 g, 作序列

$$g_0, g, g^2, \cdots, g^m, \cdots, \tag{1.42}$$

由群的封闭性知, 序列 (1.42) 中的每一项都属于 G, 由于 G 是有限群, 序列 (1.42) 中必有重复元素. 设两个最靠近的重复元素的幂指数相差 m, 即

$$g^m = g_0,$$

这样序列 (1.42) 将每隔 m 个元素就重复一次. 而集合

$$G_g = \left\{g_0, g, g^2, \cdots, g^{m-1}\right\}, \tag{1.43}$$

按群 G 的乘法满足群定义的四要求, 如满足封闭性, $g^2 g^{m-1} = g^{m+1} = g$, $g^3 g^{m-1} = g^2$ 等等; 有单位元 g_0; 有逆元素存在, 如 g 的逆元素为 g^{m-1}, g^3 的逆元素为 g^{m-3} 等等, 所以集合 (1.43) 构成一 m 阶有限群, 称为循环群 (cyclic group), 是一个由单个元素 g 的乘幂组成的有限群. 它显然是 G 的一个子群且是一个阿贝尔子群. 例如, 例 1.9 与例 1.10 所列的各子群都是相应大群的循环子群. 对于二阶群, 由于非单位元素的平方只能是单位元, 所以二阶群一定是循环群. 这是所有二阶群的另一共有特点.

1.3.3　复元素

群 G 中部分元素的集合, 可将它们视作一个整体, 称为复元素 (complex element).

复元素与普通群元素之积定义为复元素中的每一项与该群元素之积的集合, 显然它仍为一复元素. 如假设

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$$

为群 G 的一复元素, $g \in G$ 为一普通群元素, 则

$$gA = g\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} = \{ga_1, ga_2, \cdots, ga_m\}$$

也为一复元素.

两复元素的乘积定义为所有可能元素乘积项中的不同元素的集合. 即依次用一个复元素中的各项遍乘另一复元素各项, 所得乘积项中不同元素的集合即为两复元素的乘积. 显然两复元素的乘积仍为复元素.

由复元素及其乘积的定义, 群的重排定理可写成

$$gG = Gg = G \quad (g \in G), \tag{1.44}$$

另有

$$GG = G, \quad HH = H \quad (H \subset G). \tag{1.45}$$

1.3.4 陪集

1. 陪集的定义

设 H 是群 G 的一个子群, g 是 G 中但不属于 H 的任一元素, 即

$$H \subset G, \ g \in G, \ 但 \ g \notin H, \tag{1.46}$$

则复元素

$$gH = \{gh_i\} = \{gh_0, gh_1, \cdots\} \quad (h_i \in H), \tag{1.47}$$

称为子群 H 的左陪集 (left coset), 意指乘积因子 g 处在子群 H 的左侧. 类似地, 用 g 右乘 H, 得复元素

$$Hg = \{h_i g\} = \{h_0 g, h_1 g, \cdots\} \quad (h_i \in H), \tag{1.48}$$

称为子群 H 的右陪集 (right coset).

2. 有关陪集的定理

下面以左陪集为例讨论一下有关陪集的几个定理, 所得结论也适用于右陪集.

定理 1.6 陪集中不含有子群 H 的元素, 陪集不构成子群.

证明 假设左陪集 gH 中有某一元素属于 H, 如

$$gh_i = h_j \in H,$$

用 h_i^{-1} 右乘上式得

$$g = h_j h_i^{-1} \in H,$$

这与 (1.46) 式中的 $g \notin H$ 的要求相矛盾, 因此陪集中不应含有子群的元素.

既然陪集中不含有子群 H 的元素, 它就不会含有单位元, 而单位元是唯一的, 所以陪集不构成群.

定理 1.7——陪集定理 两个陪集要么含有完全相同的元素, 要么没有公共元素.

证明 设陪集 g_1H 和陪集 g_2H 有一个公共元素, 即

$$g_1h_k = g_2h_m,$$

上式两边, 左乘 g_2^{-1} 右乘 h_k^{-1} 得

$$g_2^{-1}g_1 = h_mh_k^{-1} \in H,$$

由群的重排定理知

$$g_2^{-1}g_1H = h_mh_k^{-1}H = H, \quad \Rightarrow g_1H = g_2H,$$

可见, 两个左陪集只要有一个元素是相同的, 则两陪集完全相同, 反之则完全不同, 即交集为 0, 定理得证.

这样, 群 G 可按子群 H 及其陪集进行分解, 即

$$G = \{H, g_1H, \cdots, g_kH\},$$

其中, $g_1, \cdots, g_k \in G$, 但 $g_1, \cdots, g_k \notin H$. 群 G 按子群 H 及其陪集可分解的互不相交的复元素的个数, 叫作子群 H 在 G 中的指标, 该指标的取值由如下定理确定:

定理 1.8——子群阶定理 设 n 是群 G 的阶, n_H 是子群 H 的阶, 则 n 可被 n_H 整除, 其商即为子群 H 在 G 中的指标.

证明 取 $g_1 \in G$, $g_1 \notin H$, 构成 H 的一个左陪集

$$g_1H = \{g_1h_k\} \quad (h_k \in H),$$

由定理 1.6 知, H 与 g_1H 分别取了 G 中的不同元素, 如果复元素串 H 与 g_1H 不能穷尽 G 中的元素, 取 $g_2 \in G$, $g_2 \notin H$, $g_2 \notin g_1H$, 再构成一陪集 g_2H, 由定理 1.6 与陪集定理知, g_2H 中的元素与 H 及 g_1H 中的元素完全不同, 如果复元素串 H, g_1H 与 g_2H 还不能穷尽整个 G, 照此方法继续下去, 由于群的阶数 n 有限, 总有元素 g_{i-1} 存在, 使得复元素串

$$H, g_1H, g_2H, \cdots, g_{i-1}H$$

包含了群 G 的所有元素, 且每一元素只出现一次. 这样, 子群 H 在 G 中的指标

$$i = \frac{n}{n_H} = \text{整数}, \tag{1.49}$$

定理得证.

(1.49) 式给出了群 G 与其子群阶的关系, 只有那些其阶能整除大群阶的元素的集合, 才有可能是一子群, 所以定理 1.8 又称为子群阶定理. 显然, 阶数为素数或质数的群, 除显然或平庸子群外, 不存在固有子群.

例 1.11 由 (1.40) 式知, D_3 群有子群

$$H_1 = \{e, a\}, \quad H_2 = \{e, b\}, \quad H_3 = \{e, c\}, \quad H_4 = \{e, d, f\}.$$

则 D_3 按 H_1 可分解成复元素串

$$H_1 = \{e, a\}, \quad bH_1 = \{b, f\}, \quad cH_1 = \{c, d\}, \tag{1.50}$$

以上三个复元素包含了 D_3 的所有元素, 所以 H_1 在 D_3 中的指标为

$$i_1 = \frac{n}{n_{H_1}} = \frac{6}{2} = 3.$$

H_1 的右陪集

$$H_1 b = \{b, d\} \neq bH_1, \quad H_1 c = \{c, f\} \neq cH_1, \tag{1.51}$$

可见子群 H_1 的左、右陪集不相同.

同样可将 D_3 按子群 H_2, H_3 与 H_4 分解为复元素串

$$\begin{aligned}
&H_2 = \{e, b\}, \quad aH_2 = \{a, d\}, \quad cH_2 = \{c, f\}, \quad \Rightarrow \text{指标} i_2 = 3, \\
&H_3 = \{e, c\}, \quad aH_3 = \{a, f\}, \quad bH_3 = \{b, d\}, \quad \Rightarrow \text{指标} i_3 = 3, \\
&H_4 = \{e, d, f\}, \quad aH_4 = \{a, b, c\}, \quad \Rightarrow \text{指标} i_4 = 2.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

对于子群 H_2 与 H_3, 亦可证明其左、右陪集不同, 如

$$H_2 a = \{a, f\} \neq aH_2, \quad H_3 a = \{a, d\} \neq aH_3. \tag{1.53}$$

而对于子群 H_4, 其右陪集

$$H_4 a = \{a, c, b\} = aH_4, \tag{1.54}$$

即子群 H_4 的左、右陪集相等.

例 1.12 由 (1.41) 式知, (1.22) 式的 Σ 群具有子群

$$\Sigma_i = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\sigma_i\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad Z_2 = \{\pm 1\},$$

按它们可分解的复元素串与指标分别为

$$\Sigma_i,\quad \mathrm{i}\sigma_j\Sigma_i\quad (i\neq j; i、j=1,2,3)\,,\quad \Rightarrow \text{指标} i_i=2,$$
$$Z_2,\quad \mathrm{i}\sigma_i Z_2\quad (i=1,2,3)\,,\quad \Rightarrow \text{指标} i_2=4.$$

显然, 子群 $\Sigma_i\,(i=1,2,3)$ 与 Z_2 的左、右陪集相等.

1.4　类、正规子群与商群

1.4.1　共轭元素

设 f、h 是群 G 的两个元素, 若存在元素 $g_k\in G$, 使得

$$f=g_k h g_k^{-1}, \tag{1.55}$$

则称 f 与 h 共轭, 或称 f 是 h 的共轭元素 (conjugate element), 记作 $f\sim h$.

1. 共轭关系的对称性

共轭关系具有对称性, 即若

$$f\sim h,\quad \Rightarrow h\sim f. \tag{1.56}$$

因为若 $f\sim h$, 则

$$f=g_k h g_k^{-1},\quad \Rightarrow h=g_k^{-1} f g_k,\quad \Rightarrow h=g_j f g_j^{-1}\quad \left(g_j=g_k^{-1}\right),$$

即

$$h\sim f.$$

2. 共轭关系的可传递性

共轭关系具有可传递性, 即若

$$f\sim g,\quad h\sim g,\quad \Rightarrow f\sim h. \tag{1.57}$$

因为 $h\sim g$, 所以

$$h=g_k g g_k^{-1},\quad \Rightarrow g=g_k^{-1} h g_k.$$

又 $f\sim g$, 故

$$\begin{aligned} f&=g_j g g_j^{-1}=g_j g_k^{-1} h g_k g_j^{-1}\\ &=g_j g_k^{-1} h \left(g_j g_k^{-1}\right)^{-1}=g_m h g_m^{-1}\quad \left(g_m=g_j g_k^{-1}\right),\\ &\Rightarrow f\sim h. \end{aligned}$$

1.4.2　共轭子群

设 H 与 K 是群 G 的两个子群, 若有 $g \in G$, 使得

$$H = gKg^{-1} = \left\{ gk_i g^{-1} \left| k_i \in K \right. \right\}, \tag{1.58}$$

则称 H 是 K 的共轭子群 (conjugate subgroup).

由共轭关系的对称性与可传递性知, 共轭子群也具有对称性与可传递性. 即若 H 是 K 的共轭子群, 则 K 也是 H 的共轭子群; 若 H 与 K 都是 L 的共轭子群, 则 H 与 K 也是互为共轭子群.

1.4.3　类

1. 类的定义

群 G 中所有相互共轭元素的集合, 称为群 G 的一个共轭类 (conjugate class), 简称为类 (class).

由其定义知, 群 G 中的任一类, 如第 i 个类 $C^{(i)}$, 满足关系

$$g_j C^{(i)} g_j^{-1} = C^{(i)} \quad (g_j \in G). \tag{1.59}$$

由于共轭关系具有对称性与可传递性, 一个类中的所有元素可由该类中的任一元素通过共轭变换给出. 例如, 假设 $g_{C^{(i)}}$ 是 $C^{(i)}$ 类中的任一元素, 则

$$C^{(i)} = \left\{ g'_{C^{(i)}} \left| g'_{C^{(i)}} = g_j g_{C^{(i)}} g_j^{-1}, g_j \in G \right. \right\}. \tag{1.60}$$

2. 类的性质

(1) 一个群的单位元 g_0 自成一类. 因为对于任意的 $g_k \in G$, 有 $g_k g_0 g_k^{-1} = g_0$.

(2) 除单位元 g_0 这一类外, 其余各类都不是子群. 因为这些类中不含有单位元.

(3) 阿贝尔群的每个元素自成一类. 因为对于任意的 $g \in G$, 有 $g_k g g_k^{-1} = g\,(g_k \in G)$.

(4) 不同的类中没有共同的元素. 因为共轭关系具有可传递性, 每一元素只能分属于一个确定的类.

(5) 同类的元素具有相同的阶. 因为若假设 $C^{(i)}$ 类中任一元素 $g_{C^{(i)}} \in C^{(i)}$ 的阶为 m, 即 $g_{C^{(i)}}^m = g_0$, 则对于该类中的任一元素, 有

$$\left(g_j g_{C^{(i)}} g_j^{-1}\right)^m = g_j g_{C^{(i)}}^m g_j^{-1} = g_j g_0 g_j^{-1} = g_0, \tag{1.61}$$

阶数仍为 m.

(6) 当 $g_j \in G$ 取遍群 G 中的所有元素时, $g_j g_{C^{(i)}} g_j^{-1}$ 可能不止一次地给出 $C^{(i)}$ 类中的同一元素. 例如, 若 $g_{C^{(i)}} = g_0$, 则 $g_j g_{C^{(i)}} g_j^{-1}$ 给出的总是单位元 g_0.

由于不同类含有不同的元素, 因此可对群按类进行分解. 这种按类进行的分解, 每个类中元素的个数不一定相同. 而按子群及其陪集对群所做的分解, 每个复元素中元素的个数是相等的. 按类或子群及其陪集分解群是群分解的两种常用方法.

3. 有关类的定理

定理 1.9　设 A_C 是由若干个类, 如 $C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(i)}$ 构成的集合, 即

$$A_C = \left\{C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(i)}\right\}. \tag{1.62}$$

则

$$g_j A_C g_j^{-1} = A_C \quad (g_j \in G). \tag{1.63}$$

证明　该定理的证明是简单的. 取任一元素 $g_j \in G$, 得

$$g_j A_C g_j^{-1} = \left\{g_j C^{(1)} g_j^{-1}, g_j C^{(2)} g_j^{-1}, \cdots, g_j C^{(i)} g_j^{-1}\right\} = \left\{C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(i)}\right\} = A_C.$$

定理成立.

逆定理　任一集合 A_C, 只要满足关系 (1.63), 则 A_C 必是由若干个类构成的集合.

证明　若 A_C 是如 (1.62) 式所示的多个类的集合, 则逆定理成立. 若假设除此之外, A_C 还包含其他的元素, 用 A'_C 表示这些元素的集合, 则它应满足关系

$$g_j A'_C g_j^{-1} = A'_C \quad (g_j \in G),$$

由 (1.59) 式知, 集合 A'_C 仍是一个类, 逆定理成立.

定理 1.10　两类的乘积是类的集合, 即

$$C^{(i)} C^{(j)} = \sum_k a_{ijk} C^{(k)}, \tag{1.64}$$

其中, $C^{(i)}$、$C^{(j)}$ 与 $C^{(k)}$ 都是类, a_{ijk} 为类 $C^{(k)}$ 在 $C^{(i)} C^{(j)}$ 中出现的次数.

两类的乘积定义为：依次用一个类的各元素, 遍乘另一个类的各元素, 重复出现的元素累加求和 (这一点与 1.3.3 节介绍的复元素的乘积是不同的, 在复元素的乘积中, 重复出现的元素只算一次), 由此得到的元素的集合即为两类的乘积.

证明　取任一元素 $g_k \in G$, 则

$$g_k C^{(i)} C^{(j)} g_k^{-1} = g_k C^{(i)} g_k^{-1} g_k C^{(j)} g_k^{-1} = C^{(i)} C^{(j)},$$

满足 (1.63) 式, 由定理 1.9 的逆定理知, (1.64) 式成立.

定理 1.11 设群 G 中的第 i 类 $C^{(i)}$ 包含 n_i 个元素 $g_k\,(k=1,2,\cdots,n_i)$, 则该类中各元素的和

$$c^{(i)}=\sum_{k=1}^{n_i} g_k, \tag{1.65}$$

称为 $C^{(i)}$ 类的和. 在代数运算中, $c^{(i)}$ 是一个整体或元素, 这里用小写字母示之. 它有性质:

(1) 类的和与群中的每个群元素都对易.

(2) 两类的和的乘积仍是类的和, 即

$$c^{(i)}c^{(j)}=\sum_k a_{ijk}c^{(k)}, \tag{1.66}$$

其中 $c^{(i)}$、$c^{(j)}$ 与 $c^{(k)}$ 都是类的和, a_{ijk} 为 $c^{(k)}$ 在 $c^{(i)}c^{(j)}$ 中出现的次数.

证明 (1) 由于类中各元素间互为共轭, 对于群 G 中任意的元素 $g_j\in G$, 有

$$g_j^{-1}c^{(i)}g_j=c^{(i)},$$

故

$$c^{(i)}g_j=g_jc^{(i)}\quad (g_j\in G)\,, \tag{1.67}$$

结论得证.

(2) (1.66) 与 (1.64) 式是一致的, 差别仅在于 (1.64) 式中的 $C^{(i)}$ 是类元素的集合, 而 (1.66) 式中的 $c^{(i)}$ 是类元素的和, 且两式中的展开系数 a_{ijk} 在量值上也是相等的.

定理 1.12 假设有限群 G 的阶为 n, 其中的 $C^{(i)}$ 类包含 n_i 个元素, 则 n_i 是 n 的整除因子, 即

$$\frac{n}{n_i}=\text{整数}, \tag{1.68}$$

即只有那些元素数目能整除群的阶的元素集合, 才有可能构成一个类.

证明 取群 G 中某一元素 $g\in G$, 再取 $h_i\in G$, 使其满足关系

$$h_igh_i^{-1}=g, \tag{1.69}$$

则满足上述关系的所有元素 h_i 的集合

$$H_g=\{h_i\}\quad (h_i\in G) \tag{1.70}$$

构成 G 的一个子群, 证明如下:

(1) 当 h_i 取单位元, 即 $h_i = h_0 = g_0$ 时, (1.69) 式成立, H_g 包含单位元.

(2) H_g 中的各元素 h_i 有其逆 h_i^{-1} 存在.

(3) 再取 $h_i, h_j \in H_g$, 则有

$$h_i g h_i^{-1} = g, \quad h_j g h_j^{-1} = g,$$

这样

$$(h_i h_j) g (h_i h_j)^{-1} = h_i h_j g h_j^{-1} h_i^{-1} = h_i g h_i^{-1} = g,$$

表明 $h_i h_j \in H_g$, 满足封闭性, 所以集合 H_g 构成 G 的一个子群. 因此, G 可按 H_g 及其陪集做展开

$$G = H_g + g_1 H_g + g_2 H_g + \cdots + g_{i-1} H_g, \tag{1.71}$$

其中 $g_1, g_2, \cdots, g_{i-1} \in G$ 为陪集因子. 按子群阶定理, 上式中的 i 为子群 H_g 在 G 中的指标, 取 $i = n/n_{H_g} =$ 整数, n_{H_g} 为子群 H_g 的阶.

再用 (1.71) 式中的各陪集因子对 g 作共轭变换, 得集合

$$C_g = \left\{ g, g_1 g g_1^{-1}, g_2 g g_2^{-1}, \cdots, g_{i-1} g g_{i-1}^{-1} \right\}, \tag{1.72}$$

可以证明, 集合 (1.72) 包含了 g 所有可能的共轭元素, 是一个类. 为此只需证明如下两点：

(1) (1.71) 式同一复元素中各元素对 g 的共轭变换得同一元素.

若各元素都取自 H_g，按定义 (1.69) 与 (1.70) 式，结论成立. 若假设 g_l 与 g_m 取自同一陪集 $g_m H_g$, 则一定有元素 $h_k \in H_g$ 存在, 使得

$$g_l = g_m h_k \quad (h_k \in H_g),$$

这样

$$g_l g g_l^{-1} = g_m h_k g (g_m h_k)^{-1} = g_m h_k g h_k^{-1} g_m^{-1},$$

再由 (1.69) 式知, $h_k g h_k^{-1} = g$, 上式变为

$$g_l g g_l^{-1} = g_m g g_m^{-1}, \tag{1.73}$$

表明同一陪集中的 g_l 与 g_m, 对 g 共轭变换后的结果相同, 结论也成立.

(2) 满足 (1.73) 式的 g_l 与 g_m 属于同一复元素.

若 g_l 与 g_m 都取自 H_g, 按定义 (1.69) 与 (1.70) 式, 结论成立. 一般情况下, 以 g_m^{-1} 左乘 (1.73) 式, 再以 g_m 右乘该式得

$$g = g_m^{-1} g_l g g_l^{-1} g_m = g_m^{-1} g_l g \left(g_m^{-1} g_l \right)^{-1},$$

表明 $g_m^{-1} g_l \in H_g$, 或 $g_l \in g_m H_g$, g_l 与 g_m 属于同一左陪集, 结论得证.

这样, 只要从 (1.71) 式的每一复元素中各任取一元素分别对 g 作共轭变换, 就可得到 g 的所有共轭元素. 所以, (1.72) 式是一个与 g 共轭的元素的集合, 按定义是一个类, 该类中元素的个数 n_{C_g} 正好等于子群 H_g 在 G 中的指标 i, 即

$$n_{C_g} = i = \frac{n}{n_{H_g}} = \text{整数}, \quad \Rightarrow n_{H_g} = \frac{n}{n_{C_g}} = \text{整数},$$

定理 1.12 或 (1.68) 式得证.

例 1.13 群 $D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$ 可分为三个类

$$C^{(0)} = \{e\}, \quad C^{(1)} = \{d, f\}, \quad C^{(2)} = \{a, b, c\}. \tag{1.74}$$

因为

$$\begin{aligned} &ede^{-1} = d, \quad ada^{-1} = f, \quad bdb^{-1} = f, \\ &cdc^{-1} = f, \quad ddd^{-1} = d, \quad fdf^{-1} = d, \end{aligned} \quad \Rightarrow C^{(1)} = \{d, f\}\text{ 构成一个类.}$$

另外

$$\begin{aligned} &ece^{-1} = c, \quad aca^{-1} = b, \quad bcb^{-1} = a, \\ &ccc^{-1} = c, \quad dcd^{-1} = a, \quad fcf^{-1} = b, \end{aligned} \quad \Rightarrow C^{(2)} = \{a, b, c\}\text{ 构成一个类.}$$

三个类的元素数目分别为 1、2、3, 它们都能整除 D_3 群的阶 $n = 6$, 满足要求 (1.68) 式.

按类的相乘方法与表 1.1, 可得两类的乘积

$$\begin{aligned} C^{(0)}C^{(0)} &= C^{(0)}, \quad C^{(0)}C^{(1)} = C^{(1)}, \quad C^{(0)}C^{(2)} = C^{(2)}, \\ C^{(1)}C^{(1)} &= \{d, f\}\{d, f\} = \{dd, df, fd, ff\} \\ &= \{f, e, e, d\} = \{2e, d, f\} \\ &= \left\{2C^{(0)}, C^{(1)}\right\}, \\ C^{(1)}C^{(2)} &= \{d, f\}\{a, b, c\} = \{da, db, dc, fa, fb, fc\} \\ &= \{c, a, b, b, c, a\} = 2\{a, b, c\} \\ &= \left\{2C^{(2)}\right\}, \\ C^{(2)}C^{(2)} &= \{a, b, c\}\{a, b, c\} = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\} \\ &= \{e, d, f, f, e, d, d, f, e\} = \{3e, 3d, 3f\} \\ &= \left\{3C^{(0)}, 3C^{(1)}\right\}. \end{aligned}$$

可见, 两类的乘积可展成多个类的集合, 与 (1.64) 式相一致.

例 1.14　群 $\Sigma=\{\pm1,\pm\mathrm{i}\sigma_1,\pm\mathrm{i}\sigma_2,\pm\mathrm{i}\sigma_3\}$ 可分为五个类

$$C^{(0)}=\{1\},\quad C^{(0)\prime}=\{-1\},\quad C^{(i)}=\{\pm\mathrm{i}\sigma_i\}\quad (i=1,2,3)\,. \tag{1.75}$$

因为

$$1^{-1}=1,\ (-1)^{-1}=-1,$$
$$(\mathrm{i}\sigma_i)^{-1}=-\mathrm{i}\sigma_i,\ (-\mathrm{i}\sigma_i)^{-1}=\mathrm{i}\sigma_i\quad (i=1,2,3)\,,$$

这样

$$\left.\begin{aligned}
&1\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,1^{-1}=\mathrm{i}\sigma_1,\quad (-1)\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(-1)^{-1}=\mathrm{i}\sigma_1,\\
&\mathrm{i}\sigma_1\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_1)^{-1}=\mathrm{i}\sigma_1\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(-\mathrm{i}\sigma_1)=\mathrm{i}\sigma_1,\\
&\mathrm{i}\sigma_2\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_2)^{-1}=\mathrm{i}\sigma_2\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(-\mathrm{i}\sigma_2)=-\sigma_2\sigma_3=-\mathrm{i}\sigma_1,\\
&\mathrm{i}\sigma_3\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_3)^{-1}=\mathrm{i}\sigma_3\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(-\mathrm{i}\sigma_3)=\sigma_3\sigma_2=-\mathrm{i}\sigma_1,\\
&(-\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(-\mathrm{i}\sigma_1)^{-1}=(-\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_1)=\mathrm{i}\sigma_1,\\
&(-\mathrm{i}\sigma_2)\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(-\mathrm{i}\sigma_2)^{-1}=(-\mathrm{i}\sigma_2)\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_2)=-\mathrm{i}\sigma_1,\\
&(-\mathrm{i}\sigma_3)\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(-\mathrm{i}\sigma_3)^{-1}=(-\mathrm{i}\sigma_3)\,(\mathrm{i}\sigma_1)\,(\mathrm{i}\sigma_3)=-\mathrm{i}\sigma_1,
\end{aligned}\right\}\Rightarrow C^{(1)}=\{\pm\mathrm{i}\sigma_1\}\ \text{构成一个类.}$$

同样的方法可证明：$C^{(2)}=\{\pm\mathrm{i}\sigma_2\}$, $C^{(3)}=\{\pm\mathrm{i}\sigma_3\}$ 也都是类.

五个类的元素的数目依次为 1、1、2、2、2, 可整除 Σ 群的阶 $n=8$, 满足 (1.68) 式的要求.

同样的方法可将 (1.75) 式中两类的乘积展成为多个类的集合, 有兴趣的读者可自求之.

1.4.4　正规子群

1. 正规子群的定义

设 H 是 G 的子群, 若对任意的 $g\in G$, 有

$$H=gHg^{-1}=\left\{gh_ig^{-1}\,|h_i\in H\right\}, \tag{1.76}$$

则称 H 为 G 的正规子群 (normal subgroup). 可见正规子群 H 是这样的一种子群, 取 G 中任一元素对其作共轭变换, 得到的共轭子群不变, 仍是其自身, 故有时亦称其为不变子群 (invariant subgroup).

将 (1.76) 与 (1.63) 式相比较知, 正规子群是多个类的集合. 该集合中一定含有单位元 $C^{(0)}=\{g_0\}$ 类外加其他类, 两部分构成的子群肯定满足 (1.76) 式.

2. 正规子群的性质

(1) 设 H 是 G 的正规子群, 则对于任一元素 $g\in G$, 在 $h_i\in H$ 取遍所有子群元素时, 乘积 gh_ig^{-1} 一次并且仅仅一次地给出 H 的所有元素.

证明 因为 H 是正规子群, $gh_ig^{-1}=h_j\in H$, 即 H 中的任一元素都可写成 gh_ig^{-1} 的形式.

另外, 当 $h_i\neq h_k$ 时, $gh_ig^{-1}\neq gh_kg^{-1}$, 否则将引起矛盾. 因此, 当 $h_i\in H$ 取遍 H 中的所有元素时, gh_ig^{-1} 一次并且仅仅一次地给出 H 的所有元素.

(2) 正规子群的左陪集等于右陪集.

证明 设 H 是 G 的正规子群, 则对于 $g\in G$, $g\notin H$ 生成 H 的左陪集

$$gH=\{gh_i\,|h_i\in H\},$$

与右陪集

$$Hg=\{h_ig\,|h_i\in H\}.$$

由于 H 是群 G 的正规子群, 所以

$$g^{-1}h_ig\in H.$$

这样, H 的左陪集

$$g\left(g^{-1}h_ig\right)\in gH=h_ig\in Hg,$$

表明

$$gH=Hg,$$

左、右陪集相等.

例 1.15 由 (1.40) 式知, D_3 群有子群

$$H_1=\{e,a\},\quad H_2=\{e,b\},\quad H_3=\{e,c\},\quad H_4=\{e,d,f\}.\tag{1.77}$$

再由 (1.74) 式知, D_3 群有类

$$C^{(0)}=\{e\},\quad C^{(1)}=\{d,f\},\quad C^{(2)}=\{a,b,c\}.\tag{1.78}$$

可见, 子群 H_4 是类的集合

$$H_4=\left\{C^{(0)},C^{(1)}\right\},\tag{1.79}$$

所以 H_4 是正规子群. 由 (1.54) 式知, H_4 的左、右陪集相等. 再比较 (1.77) 与 (1.78) 式知, H_1、H_2 与 H_3 三子群是互为共轭子群.

例 1.16 由 (1.41) 式知, $\varSigma$ 群有子群

$$\varSigma_i=\{\pm1,\pm\mathrm{i}\sigma_i\}\quad(i=1,2,3),\quad Z_2=\{\pm1\}.$$

另由 (1.75) 式知, Σ 有类

$$C^{(0)} = \{1\}\,, \quad C^{(0)\prime} = \{-1\}\,, \quad C^{(i)} = \{\pm \mathrm{i}\sigma_i\} \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

比较以上两式知

$$\Sigma_i = \left\{C^{(0)}, \quad C^{(0)\prime}, \quad C^{(i)}\right\} \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

$$Z_2 = \left\{C^{(0)}, \quad C^{(0)\prime}\right\},$$

即子群 $\Sigma_i\,(i = 1, 2, 3)$、Z_2 都是类的集合, 是正规子群, 由例 1.12 的讨论知, 它们的左、右陪集相等.

1.4.5 商群

设 H 是群 G 的正规子群, 则由子群阶定理知, G 可按 H 及其左陪集 (等于右陪集) 进行分解，得复元素串

$$H, g_1H, g_2H, \cdots, g_{i-1}H.$$

用 G/H 表示该复元素串的集合, 得

$$G/H = \{H, g_1H, g_2H, \cdots, g_{i-1}H\}\,, \tag{1.80}$$

如果将该集合中的每一个复元素看作一个元素, 并定义该集合中元素的乘积为复元素之积, 则集合 G/H 构成一个群, 称为正规子群 H 的商群 (quotient group). 这可简单证明如下：

(1) 封闭性：$g_lHg_mH = g_lg_mHH = g_kH \in G/H \quad (g_k = g_lg_m)\,, \quad \Rightarrow$ 满足.

(2) 结合律：$(g_lHg_mH)\,g_kH = (g_lg_mH)\,g_kH = g_lg_mg_kH = g_lH\,(g_mHg_kH)\,, \quad \Rightarrow$ 成立.

(3) 单位元：$Hg_lH = g_lHH = g_lH, \quad \Rightarrow$ 存在, 为 H.

(4) 逆元：$g_lHg_l^{-1}H = g_lg_l^{-1}HH = H, \quad \Rightarrow g_lH$ 的逆元素存在, 为 $g_l^{-1}H$.

由子群阶定理知, 商群的阶等于正规子群 H 在群 G 中的指标.

例 1.17 由例 1.15 知, D_3 群有正规子群

$$H_4 = \{e, d, f\}\,,$$

取 $a \in D_3$, $a \notin H_4$, 得左陪集 (等于右陪集)

$$aH_4 = \{ae, ad, af\} = \{a, b, c\}\,,$$

则 H_4 的商群为

$$D_3/H_4 = \{H_4, aH_4\} \tag{1.81}$$

是一二阶循环群, 单位元为 H_4, $(aH_4)^2 = aH_4aH_4 = aaH_4H_4 = H_4$.

例 1.18 由例 1.16 知, Σ 群有正规子群

$$\Sigma_i = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\sigma_i\} \quad (i = 1, 2, 3), \quad Z_2 = \{\pm 1\}.$$

由 $\Sigma_i\,(i = 1, 2, 3)$ 可构成商群

$$\Sigma/\Sigma_i = \{\Sigma_i, \mathrm{i}\sigma_j\Sigma_i\} \quad (i \neq j; i、j = 1, 2, 3), \tag{1.82}$$

是一二阶循环群, 单位元为 $\Sigma_i\,(i = 1, 2, 3)$, $(\mathrm{i}\sigma_j\Sigma_i)^2 = \mathrm{i}\sigma_j\Sigma_i\mathrm{i}\sigma_j\Sigma_i = -\sigma_j\sigma_j\Sigma_i\Sigma_i = \Sigma_i$, 最后一步用到了关系 $\Sigma_i = -\Sigma_i$.

由 Z_2 可构成商群

$$\Sigma/Z_2 = \{Z_2, \mathrm{i}\sigma_1 Z_2, \mathrm{i}\sigma_2 Z_2, \mathrm{i}\sigma_3 Z_2\}, \tag{1.83}$$

是一四阶群, 单位元是 Z_2, 注意到 $Z_2 = -Z_2$ 与 (1.21) 式, (1.83) 式满足封闭性, 各元素的逆为其自身.

1.5 群的同构与同态

1.5.1 群的同构

若从群 G 到群 F, 存在着一个一一对应的满映射 ϕ, 且保持群的代数运算 (乘法) 规则不变, 即群 G 中两元素映射的乘积, 等于两元素乘积的映射, 则称群 G 和群 F 同构 (isomorphism), 记为 $G \approx F$, 而称 ϕ 为同构映射. 这里的满映射, 指的是两群中的每一元素都存在着映射对象, 再加上映射是一对一的, 所以两同构群中的元素其数目相等, 如图 1.8 所示.

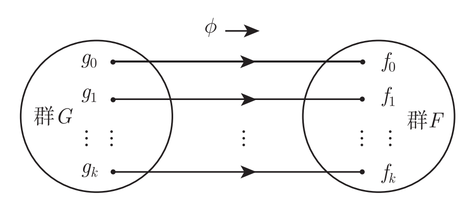


图 1.8 群 G 到群 F 的同构映射

同构映射有如下两个特点:
(1) 单位元映射到单位元.
(2) 逆元素映射到逆元素.

证明　(1) 假设群 G 与 F 的单位元分别为 g_0 与 f_0. 若在同构映射 ϕ 下

$$\phi : g_0 \to f_0',$$

这里假设 $f_0' \in F$ 为不同于 f_0 的元素, 则由于

$$\phi : g_i \in G \to f_i \in F,$$

则

$$\phi : g_0 g_i = g_i g_0 = g_i \to f_0' f_i = f_i f_0' = f_i, \quad \Rightarrow f_0' = f_0, \text{ 结论得证.}$$

(2) 在同构映射 ϕ 下

$$\phi : g_i \in G \to f_i \in F.$$

若

$$\phi : g_i^{-1} \to {f'}_i^{-1},$$

这里假设 ${f'}_i^{-1} \in F$ 为不同于 f_i^{-1} 的元素, 则有

$$\phi : g_i g_i^{-1} = g_0 \to f_i {f'}_i^{-1} = f_0, \quad \Rightarrow {f'}_i^{-1} = f_i^{-1}, \text{ 结论得证.}$$

两个同构群具有相同形式的乘法表, 即乘法表中的元素是一一对应的.

定理 1.13——凯莱 (Cayley) 定理　任一 n 阶有限群 G 都和 n 元置换群 S_n 的一个子群同构.

证明　假设群 G 中的 n 个元素的排列次序为

$$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}. \tag{1.84}$$

取任一元素 $g_k \in G$, 由群的重排定理知, 集合

$$\{g_k g_i = g_{k_i}, i = 1, 2, \cdots, n\} = \{g_{k_1}, g_{k_2}, \cdots, g_{k_n}\}, \tag{1.85}$$

给出 (1.84) 式中的所有元素, 区别仅是元素的排列次序有所不同, 相当于集合 (1.84) 式中各元素的编号作了一个置换

$$p_{g_k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}, \tag{1.86}$$

角标 “g_k” 表示该置换是由群元素 $g_k \in G$ 乘 (1.84) 式得到的, 这样就建立起了 $g_k \in G$ 与 $p_{g_k} \in S_n$ 之间的映射关系, 且这种映射是一对一的, 每一元素都有一个置换与之对应, 即

$$\text{群 } G \begin{array}{ccc} & \phi \rightarrow & \\ g_1 & \longrightarrow & p_{g_1} \\ g_2 & \longrightarrow & p_{g_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n & \longrightarrow & p_{g_n} \end{array} S_n \text{ 的 } n \text{ 个元素的子群.} \tag{1.87}$$

由于 $g_k g_i = g_{k_i}$, 则

$$g_l g_k g_i = g_l g_{k_i} \xlongequal{g_l g_k = g_m} g_m g_i \xlongequal{(1.85)\text{式}} g_{m_i}, \tag{1.88}$$

由关系 $g_l g_{k_i} = g_{m_i}$ 得置换

$$p_{g_l} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

由关系 $g_m g_i = g_{m_i}$ 得置换

$$p_{g_m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} p_{g_l} p_{g_k} &= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} = p_{g_m}, \end{aligned} \tag{1.89}$$

按 (1.88) 式中的假设 $g_l g_k = g_m$, 所以 (1.89) 式表明, (1.87) 式的映射保持乘法规则不变: 两元素映射的乘积等于两元素乘积的映射, 再加上映射是一一对应的, 所以 n 阶群 G 与 n 元置换群 S_n 的子群同构, 定理得证.

例 1.19 所有二阶群都同构.

因为任一二阶群只有两个元素, 一个是单位元, 另一个是非单位元. 非单位元的平方不能为该元素自身, 只能是单位元. 所有二阶群都满足这样的乘法规律, 具有相同的乘法表, 所以所有二阶群都同构.

例 1.20 D_3 群与置换 S_3 群同构.

两群的同构关系在例 1.4 中已给出, 为

$$
D_3\text{ 群}\quad
\begin{array}{ccc}
 & \phi \longrightarrow & \\
e & \longrightarrow & p_e \\
a & \longrightarrow & p_a \\
b & \longrightarrow & p_b \\
c & \longrightarrow & p_c \\
d & \longrightarrow & p_d \\
f & \longrightarrow & p_f
\end{array}
\quad S_3\text{ 群}, \tag{1.90}
$$

上式与凯莱定理的 (1.87) 式相一致. 与 D_3 群一样, S_3 群也有三个类

$$
C^{(0)} = \{p_e\}\,, \quad C^{(1)} = \{p_d, p_f\}\,, \quad C^{(2)} = \{p_a, p_b, p_c\}\,, \tag{1.91}
$$

四个子群

$$
H_1 = \{p_e, p_a\}\,, \quad H_2 = \{p_e, p_b\}\,, \quad H_3 = \{p_e, p_c\}\,, \quad H_4 = \{p_e, p_d, p_f\}\,, \tag{1.92}
$$

前三者是互为共轭子群, 第四者是正规子群.

例 1.21 群 G 的两个互为共轭的子群 H 和 K 同构.

因为对于 $g \in G$, 使 $h_i \in H$ 与 $k_i \in K$ 有一一对应的关系, 即

$$
h_i = g k_i g^{-1}.
$$

另

$$
h_j = g k_j g^{-1} \quad (h_j \in H, k_j \in K)\,,
$$

则

$$
h_i h_j = g k_i g^{-1} g k_j g^{-1} = g k_i k_j g^{-1},
$$

即两元素映射的乘积等于两元素乘积的映射, 保持乘法规则不变, 故 H 与 K 同构. 如 D_3 群有三个互为共轭子群 $H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$, $H_3 = \{e, c\}$, 它们都是二阶循环群, 同构.

1.5.2 群的同态

如果存在映射 ϕ, 使得群 G 中的每一个元素都唯一地对应于群 F 的一个元素, 但群 F 中的一个元素对应于群 G 中的元素多于一个, 且保持群的代数运算 (乘法) 规则不变, 即 G 中两元素映射的乘积等于两元素乘积的映射, 则称群 G 与群 F 同

态 (homomorphism), 记为 $G \sim F$, 而称 ϕ 为同态映射. 如图 1.9 所示, 群 G 中下角标相同的一组元素, 映射到群 F 中的一个元素.

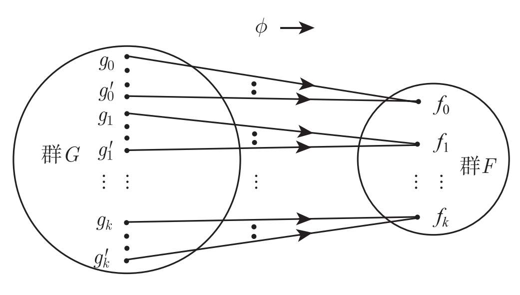


图 1.9 群 G 到群 F 的同态映射

显然, 任何群 G 与只有单位元的群 $Z_1 = \{1\}$ 同态, 这种同态是显然的, 一般不考虑这种同态. 与同构映射一样, 在同态映射中, 单位元映射到单位元, 逆元素映射到逆元素.

例 1.22 D_3 群与 Z_2 群同态, 元素间的映射关系为

$$D_3\text{ 群}\ \begin{matrix} \{e,d,f\} & \xrightarrow{\phi} & 1 \\ \{a,b,c\} & \xrightarrow{\phi} & -1 \end{matrix}\ Z_2\text{ 群},$$

D_3 群中的三个元素同态映射到 Z_2 群中的一个元素.

例 1.23 Σ 群与 S_2 置换群同态, 元素间的映射关系为

$$\Sigma\text{ 群}\ \begin{matrix} \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\sigma_i\}\,(i=1,2,3) & \xrightarrow{\phi} & p_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \{\pm \mathrm{i}\sigma_j, \pm \mathrm{i}\sigma_k\}\,(i \neq j \neq k; j\text{、}k=1,2,3) & \xrightarrow{\phi} & p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}\ S_2\text{ 群},$$

Σ 群中的四个元素同态映射到 S_2 群中的一个元素.

1.5.3 同态核

设群 G 和群 F 同态, 则群 G 中与群 F 的单位元 f_0 对应的元素集合 $H = \{h_i\}$ 称为同态核 (homomorphic kernel), 如图 1.10 所示.

由例 1.22 与例 1.23 知, D_3 群的元素集合 $H_4 = \{e, d, f\}$ 是同态核, Σ 群的元素集合 $\Sigma_i = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\sigma_i\}\,(i = 1, 2, 3)$ 是同态核, 它们都是正规子群, 这是同态核的共有特点, 由如下同态核定理描述:

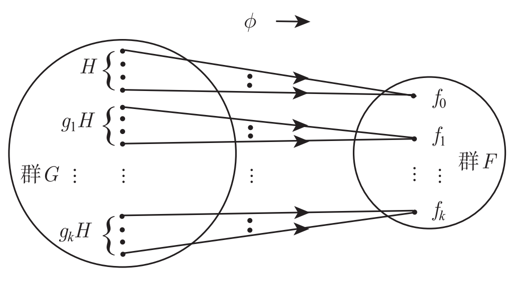


图 1.10　同态核 H

定理 1.14——同态核定理　设群 G 与群 F 同态, 则有:
(1) 同态核 H 是 G 的正规子群.
(2) 商群 G/H 与 F 同构.

证明　(1) 先证明同态核 H 是 G 的子群. 为此, 任取 $h_i, h_j \in H$, 有

$$\phi : h_i \to f_0,\ h_j \to f_0.$$

由于同态映射保持乘法规则不变, 有

$$\phi : h_i h_j \to f_0, \quad \Rightarrow h_i h_j \in H,$$

满足封闭性. 另外, 同态映射将单位元映射到单位元, 故 H 中包含 G 的单位元 g_0. 再者, 若 $h_i \in H$, 其逆 h_i^{-1} 也属于 H, 即 $h_i^{-1} \in H$. 因为若假设 $h_i^{-1} \notin H$, 则

$$\phi : h_i^{-1} \to f_0' \neq f_0,$$

而

$$\phi : h_i^{-1} h_i = g_0 \to f_0' f_0 = f_0,$$

表明

$$f_0' = f_0, \quad \Rightarrow h_i^{-1} \in H,$$

所以 H 是 G 的子群, 再来证明 H 是 G 的正规子群.

对于 $h_i \in H$, 与 h_i 同类的元素为

$$g_j h_i g_j^{-1} \quad (g_j \in G).$$

在同态映射下

$$\phi : g_j \to f_j, g_j^{-1} \to f_j^{-1},$$

故

$$\phi : g_j h_i g_j^{-1} \to f_j f_0 f_j^{-1} = f_0, \quad \Rightarrow g_j h_i g_j^{-1} \in H, \quad \Rightarrow g_j H g_j^{-1} = H,$$

满足 (1.76) 式, H 是 G 的正规子群.

(2) 由正规子群 H, 可构成商群

$$G/H=\{H,g_1H,\cdots,g_lH\}, \tag{1.93}$$

由于同态映射保持群的乘法规则不变, 只要证明 (1.93) 式中的复元素与 F 中的元素一一对应, 如图 1.10 所示, 就证明了 G/H 与 F 同构.

首先, H 的一个陪集

$$g_iH=\{g_ih_j\} \quad (h_j\in H),$$

对应于 F 中的一个元素. 因为若假设

$$\phi: g_i\to f_i, \quad \Rightarrow \phi: g_ih_j\to f_if_0=f_i.$$

再者, H 的不同陪集 g_iH, g_jH, 对应于 F 中不同的元素. 因为 g_iH 与 g_jH 为不同陪集, 由陪集定理知, g_iH 与 g_jH 没有共同元素. 若假设

$$\phi: g_i\to f_i,\ g_j\to f_j \text{ 且 } f_i=f_j, \tag{1.94}$$

则对于任一 $h_k\in H$

$$\phi: g_jh_k\to f_jf_0=f_j, \quad \Rightarrow \phi: g_i^{-1}g_jh_k\to f_i^{-1}f_jf_0=f_i^{-1}f_j=f_0,$$

这样

$$g_i^{-1}g_jh_k=h_l\in H, \quad \Rightarrow g_iH=g_jH,$$

与陪集定理相悖, 原假设 (1.94) 不成立, $f_i\neq f_j$. 所以 (1.93) 式中的复元素与 F 的元素有一一对应的关系, 商群 G/H 与 F 同构.

例 1.24 由例 1.22 的讨论知, D_3 群的正规子群或同态核 $H_4=\{e,d,f\}$ 与其陪集 $aH_4=\{a,b,c\}$ 构成二阶商群

$$D_3/H_4=\{H_4,aH_4\}.$$

它与所有二阶群, 如 Z_2 群同构.

再由例 1.23 知, $\varSigma$ 群的正规子群或同态核 $\varSigma_i=\{\pm1,\pm\mathrm{i}\sigma_i\}\,(i=1,2,3)$ 与其陪集 $\mathrm{i}\sigma_j\varSigma_i\,(i\neq j;i、j=1,2,3)$ 构成二阶商群

$$\varSigma/\varSigma_i=\{\varSigma_i,\mathrm{i}\sigma_j\varSigma_i\} \quad (i\neq j;i、j=1,2,3).$$

它与所有二阶群, 如 S_2 置换群同构.

1.6　直积群、单纯群与半单群

1.6.1　直积群

设群 G 有子群 G_1 与 G_2, 它们的阶数分别为 n_1 与 n_2. 若对于任意的 $g_{1i} \in G_1$, $g_{2j} \in G_2$, 两者之间对易, 即

$$g_{1i}g_{2j} = g_{2j}g_{1i},$$

则由 n_1n_2 个元素构成的集合 $\{g_{1i}g_{2j}\}$, 按群 G 的乘法也构成一个群, 称为 G_1 与 G_2 的直积群 (direct product group), 记作 $G_1 \otimes G_2$, 即

$$G_1 \otimes G_2 = \{g_{1i}g_{2j}\}\,. \tag{1.95}$$

证明　(1) 单位元存在, 为 $g_0g_0 = g_0$, 其中 $g_0 \in G$, 为 G 的单位元, 因为 $g_0g_0g_{1i}g_{2j} = g_{1i}g_{2j}$.

(2) 封闭性成立, 因为

$$g_{1i}g_{2j}g_{1k}g_{2l} = g_{1i}g_{1k}g_{2j}g_{2l} = g_{1p}g_{2q} \in G_1 \otimes G_2,$$

其中 $g_{1p} = g_{1i}g_{1k} \in G_1, g_{2q} = g_{2j}g_{2l} \in G_2$.

(3) 各子群满足结合律, 且不同子群的元素间相互对易, 则直积群元素的乘积也满足结合律.

(4) $g_{1i}g_{2j}$ 的逆元素为 $g_{1i}^{-1}g_{2j}^{-1} \in G_1 \otimes G_2$.

故集合 $\{g_{1i}g_{2j}\}$ 构成群. G_1 与 G_2 通常称为直积因子, 显然 $G_1 \otimes G_2 = G_2 \otimes G_1$, $G_1 \otimes G_2$ 也是 G 的一个子群, 即 $G_1 \otimes G_2 \subset G$.

直积群中不同直积因子的元素是相互对易的. 但同一直积因子中的元素可以是不对易的. 容易证明, 直积因子 G_1 与 G_2 都是直积群 $G_1 \otimes G_2$ 的正规子群. 因为对于任意的 $g_1 \in G_1$, 其共轭元素为

$$g_{1i}g_{2j}g_1\left(g_{1i}g_{2j}\right)^{-1} = g_{1i}g_{2j}g_1g_{2j}^{-1}g_{1i}^{-1} = g_{1i}g_1g_{1i}^{-1} \in G_1, \quad \Rightarrow g_{1i}g_{2j}G_1\left(g_{1i}g_{2j}\right)^{-1} = G_1,$$

满足 (1.76) 式, G_1 是 $G_1 \otimes G_2$ 的正规子群. 同理, G_2 也是 $G_1 \otimes G_2$ 的正规子群. 商群 $G_1 \otimes G_2/G_1$ 与 G_2 同构, $G_1 \otimes G_2/G_2$ 与 G_1 同构.

除了一个群的两个子群可构成直积群外, 任意两个群, 只要二者中的元素可对易, 它们也可以构成直积群. 进一步, 对于多个群, 只要彼此间的元素对易, 由它们可以构成多重直积群.

群的直积是扩大群的最简单方法, 在将物理系统由低且简单的对称性扩大到高而复杂的对称性时, 常常要用到直积群的概念. 例如, 弱电统一规范理论具有

$SU(2) \otimes U(1)$ 对称性, 其中 $SU(2)$ 是二维特殊幺正群, $U(1)$ 是一维幺正群, 两群的定义与性质在后面的 4.1 节中将有专门的讨论.

例 1.25 六阶循环群 $G_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ 是二阶循环群 $G_2 = \{e, a^3\}$ 和三阶循环群 $G_3 = \{e, a^2, a^4\}$ 的直积群, 即

$$G_6 = G_2 \otimes G_3.$$

G_2 与 G_3 都是 G_6 的正规子群, 而此时的直积群 $G_2 \otimes G_3$ 构成 G_6 的显然或平庸子群.

G_2 及其陪集串为

$$G_2 = \{e, a^3\}, \quad aG_2 = \{a, a^4\}, \quad a^2G_2 = \{a^2, a^5\},$$

则 G_2 的商群为

$$G_6/G_2 = \{G_2, aG_2, a^2G_2\}.$$

注意到 $a^6 = e$, $a^3G_2 = G_2$, 商群 G_6/G_2 与 G_3 的同构关系为

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi \rightarrow & & \\ & G_2 & \longrightarrow & e & \\ G_6/G_2 & aG_2 & \longrightarrow & a^2 & G_3. \\ & a^2G_2 & \longrightarrow & a^4 & \end{array}$$

G_3 及其陪集串为

$$G_3 = \{e, a^2, a^4\}, \quad aG_3 = \{a, a^3, a^5\},$$

得 G_3 的商群

$$G_6/G_3 = \{G_3, aG_3\},$$

与 G_2 群的同构关系为

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi \rightarrow & & \\ G_6/G_3 & G_3 & \longrightarrow & e & G_2. \\ & aG_3 & \longrightarrow & a^3 & \end{array}$$

1.6.2 单纯群与半单群

若群 G 除去自身与单位元外, 不包含正规子群, 则称该群为单纯群 (simple group). 若群 G 不含有阿贝尔正规子群, 则称 G 为半单群 (semisimple group). 显

然, 有限个非阿贝尔单纯群的直积是半单群. 因为由 1.6.1 节的讨论知, 直积群中的每个直积因子都是其正规子群, 则在由非阿贝尔单纯群构成的直积群中不含有阿贝尔正规子群, 所以是半单群. 单纯群由于不含有包括阿贝尔正规子群在内的任何正规子群, 所以单纯群一定是半单的; 反之, 半单群可以含有除阿贝尔正规子群以外的其他形式的正规子群, 所以半单群不一定是单纯群. 例如, 由非阿贝尔单纯群构成的直积是半单群, 但不是单纯群.

第 2 章　有限群表示论

群表示论是用具体的线性群或矩阵群描述抽象群的一种理论, 是研究和应用群的重要渠道之一. 本章将讨论有限群表示论的基本知识, 如群的线性表示、群的可约表示与不可约表示、群的正则表示及表示的特征标等; 介绍并证明有限群表示中的几个重要定理, 如有限群表示的幺正性、舒尔定理与不可约表示矩阵元的正交性定理等.

2.1　群的线性表示

2.1.1　群的线性表示

由第 1 章的讨论知, 若两个群同构或同态, 则它们将具有相同形式的乘法表. 从代数运算的角度来看, 两同构或同态的群是相同的. 因此, 对于一个抽象群 G, 如果它和一个容易处理的具体群 $D(G)$ 同构或同态, 那么只要研究清楚了 $D(G)$ 的代数性质, 也就相当于弄清楚了抽象群 G 的代数性质. 用这种方法处理抽象群, 称为用具体群 $D(G)$ 表示了抽象群 G, 或称 $D(G)$ 是 G 的表示 (representation). 如果 $D(G)$ 是线性空间 L_l 中的 l 阶非奇异矩阵群, 即其矩阵的行列式 $\det[D(G)] \neq 0$, 则称 $D(G)$ 是 G 的线性表示, 而称 L_l 为群 G 的表示空间; 如果矩阵群 $D(G)$ 和群 G 同构, 则称 $D(G)$ 是 G 的忠实表示, 这时群 G 中的元素 g 和矩阵群 $D(G)$ 中的元素 $D(g)$ 是一一对应的; 如果矩阵群 $D(G)$ 与 G 同态, 则称 $D(G)$ 是 G 的非忠实表示. 让群的所有元素都和一个单位矩阵相对应, 就得到仅有一个单位元 (单位矩阵) 构成的表示, 每个群都有这样的表示, 称为恒等表示或平庸表示.

2.1.2　线性表示的特点

由定义知, 线性表示具有如下三个特点:

(1) 表示矩阵一定是方阵.

(2) 单位元的表示矩阵是单位矩阵.

(3) 互逆元素的表示矩阵是互逆矩阵.

证明　(1) 由于表示矩阵构成群, 任一矩阵需存在逆, 所以表示矩阵应是非奇异的, 即其行列式不能为零. 而非方矩阵, 不存在行列式, 也就无从谈起奇异或非奇异矩阵了.

l 维线性空间 L_l 中的表示矩阵 $D(G)$ 是 $l \times l$ 方阵或 l 阶方阵或 l 阶矩阵, 或者说表示矩阵 $D(G)$ 是 l 维的.

(2) 假设 g_i、g_j 为 G 中的任意两元素, 由封闭性知

$$g_i g_j = g_k \in G,$$

同构或同态保持乘法规则不变要求

$$D(g_i) D(g_j) = D(g_k) = D(g_i g_j).$$

对于 G 中的单位元 g_0, 有

$$g_0 g_i = g_i g_0 = g_i,$$

则

$$D(g_0) D(g_i) = D(g_i) D(g_0) = D(g_i),$$

表明

$$D(g_0) = I \text{ (单位矩阵)}, \tag{2.1}$$

结论得证.

(3) 假设 g_i 的逆为 g_i^{-1}, 则 $g_i g_i^{-1} = g_0$, 对应的表示矩阵为

$$D(g_i) D\left(g_i^{-1}\right) = D(g_0),$$

因此

$$D\left(g_i^{-1}\right) = D^{-1}(g_i), \tag{2.2}$$

结论得证.

2.1.3　表示矩阵的确定

设 $\{e_\nu\}$ 为线性空间 L_l 中的一组基矢 (注：按习惯, 抽象代数空间中的矢量用简单的斜体字母表示, 全文同), 群 G 中的一个元素 g 对基矢 e_ν 作用后得该空间的一个新基矢

$$g e_\nu = \sum_\alpha D_{\alpha\nu}(g) e_\alpha, \tag{2.3}$$

若基矢是正交归一的, 即其内积

$$(e_\mu, e_\nu) = \delta_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

则矩阵 $D(g)$ 的矩阵元为

$$D_{\mu\nu}(g) = (e_\mu, g e_\nu), \tag{2.5}$$

这些矩阵的集合 $D(G) = \{D(g), g \in G\}$ 构成群 G 的一个表示. 实际上, 若假设 $g' \in G$, 则

$$gg'e_\nu = g\sum_\alpha D_{\alpha\nu}(g')\, e_\alpha = \sum_{\alpha\beta} D_{\beta\alpha}(g)\, D_{\alpha\nu}(g')\, e_\beta.$$

另外

$$gg'e_\nu = \sum_\beta D_{\beta\nu}(gg')\, e_\beta,$$

比较以上两式知

$$D_{\beta\nu}(gg') = \sum_\alpha D_{\beta\alpha}(g)\, D_{\alpha\nu}(g'),$$

亦即

$$D(g)\, D(g') = D(gg') \quad (g、g' \in G), \tag{2.6}$$

保持乘法规则不变, 所以由 (2.5) 式确定的矩阵群 $D(G) = \{D(g), g \in G\}$ 构成群 G 的一个表示. 进一步, 若变换前后的表示空间都是正交的, $D(G)$ 还是一个幺正表示, 则

$$D^\dagger(g) = D^{-1}(g) \quad (g \in G). \tag{2.7}$$

因为, 由 (2.3) 式得

$$ge_\mu = \sum_\beta D_{\beta\mu}(g)\, e_\beta,$$

上式与 (2.3) 式的内积为

$$(ge_\mu, ge_\nu) = \sum_{\beta\alpha} D^*_{\beta\mu}(g)\, D_{\alpha\nu}(g)\, (e_\beta, e_\alpha),$$

若变换前后表示空间的基矢都正交, 得

$$\begin{aligned}\delta_{\mu\nu} &= \sum_{\beta\alpha} D^*_{\beta\mu}(g)\, D_{\alpha\nu}(g)\, \delta_{\beta\alpha} = \sum_\beta D^*_{\beta\mu}(g)\, D_{\beta\nu}(g) \\ &= \sum_\beta D^\dagger_{\mu\beta}(g)\, D_{\beta\nu}(g) = \left[D^\dagger(g)\, D(g)\right]_{\mu\nu},\end{aligned}$$

则表明

$$D^\dagger(g)\, D(g) = I, \quad \Rightarrow D^\dagger(g) = D^{-1}(g),$$

(2.7) 式得证.

2.1.4　基矢变换对表示矩阵的影响

设 e'_μ 为新基矢, 它与旧基矢 e_μ 之间的变换关系为

$$e'_\mu = \sum_\alpha S_{\alpha\mu} e_\alpha, \quad \text{或} \quad e_\mu = \sum_\alpha S^{-1}_{\alpha\mu} e'_\alpha, \tag{2.8}$$

其中 S 为变换矩阵.

用元素 $g \in G$ 作用于 (2.8) 式的新基矢, 得

$$\begin{aligned} g e'_\mu &= \sum_\alpha S_{\alpha\mu} g e_\alpha \overset{(2.3)\text{式}}{=\!=\!=} \sum_\alpha \sum_\beta S_{\alpha\mu} D_{\beta\alpha}(g) e_\beta \\ &\overset{(2.8)\text{式}}{=\!=\!=} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\rho S_{\alpha\mu} D_{\beta\alpha}(g) S^{-1}_{\rho\beta} e'_\rho \\ &= \sum_\rho \left[S^{-1} D(g) S\right]_{\rho\mu} e'_\rho \overset{(2.3)\text{式}}{=\!=\!=} \sum_\rho D'_{\rho\mu}(g) e'_\rho, \end{aligned}$$

故

$$D'_{\rho\mu}(g) = \left[S^{-1} D(g) S\right]_{\rho\mu},$$

或

$$D'(g) = S^{-1} D(g) S. \tag{2.9}$$

可见, 当表示空间 L_l 的基矢作如 (2.8) 式所示的变换时, 群 G 的表示矩阵 $D(G)$ 将经受一个如 (2.9) 式所示的相似变换. 与 (2.3) 式比较知, (2.8) 式的变换矩阵 S 与表示矩阵 $D(G)$ 具有相同的作用, 都是将旧基矢变成新基矢, 所以与 $D(G)$ 一样, 在新、旧基矢都是正交的情况下, 变换矩阵 S 还是幺正的.

若群 G 的两组表示可通过相似变换相联系, 则称这两组表示为等价表示, 记作

$$D'(G) \simeq D(G). \tag{2.10}$$

对 (2.6) 式两边作相似变换得

$$S^{-1} D(g) D(g') S = S^{-1} D(gg') S, \quad \Rightarrow S^{-1} D(g) S S^{-1} D(g') S = S^{-1} D(gg') S,$$

再由 (2.9) 式知

$$D'(g) D'(g') = D'(gg') \quad (g、g' \in G), \tag{2.11}$$

表明, 若 $D(G)$ 是群 G 的一个表示, 则其等价表示 $D'(G) = S^{-1} D(G) S$ 也是群 G 的一个表示, 这是显然的. 因为由以上的讨论知, 两组等价表示实际上是同一组表示在不同基矢下的不同形式. 所以, 寻求群 G 的表示, 关键在于判断两组表示是否等价, 并找出所有不等价的表示. 另外, 等价于同一组表示的两组表示也等价, 例如, 若

$$D_1 = S_1^{-1} D S_1, \quad D_2 = S_2^{-1} D S_2,$$

即表示 D_1 与 D_2 都与 D 等价, 则

$$D = S_2 D_2 S_2^{-1},$$

故

$$D_1 = S_1^{-1} S_2 D_2 S_2^{-1} S_1 = \left(S_2^{-1} S_1\right)^{-1} D_2 S_2^{-1} S_1,$$

记 $S_2^{-1} S_1 = S_3$, 得

$$D_1 = S_3^{-1} D_2 S_3, \quad \Rightarrow D_1 \simeq D_2,$$

结论得证.

2.1.5 有限群表示的幺正性

由上面的讨论知, 若新、旧表示空间的基矢都是正交的, 则表示矩阵 $D(G)$ 是幺正的; 否则, 该结论一般来说不再成立, 但对于有限群表示, 存在如下定理:

定理 2.1 有限群的任一表示都等价于一个幺正表示.

证明 设群 G 有 n 个元素, 群 G 在 l 维线性表示空间 L_l 中的表示矩阵为 $D(g)\,(g \in G)$. 另设 $\zeta\,(\zeta_\mu, \mu = 1, 2, \cdots, l)$ 为 L_l 中的任一矢量, 即

$$\zeta = \sum_\alpha \zeta_\alpha e_\alpha. \tag{2.12}$$

用 $g \in G$ 作用于 ζ 得一新矢量

$$\zeta^{(g)} = g\zeta = \sum_\alpha \zeta_\alpha g e_\alpha \xlongequal{(2.3)\text{式}} \sum_\beta \left(\sum_\alpha D_{\beta\alpha}(g)\,\zeta_\alpha\right) e_\beta = \sum_\beta \zeta_\beta^{(g)} e_\beta, \tag{2.13}$$

所以新、旧矢量间有关系

$$\zeta_\beta^{(g)} = \sum_\alpha D_{\beta\alpha}(g)\,\zeta_\alpha \quad (g \in G), \tag{2.14a}$$

或写成矩阵形式

$$\zeta^{(g)} = D(g)\,\zeta \quad (g \in G), \tag{2.14b}$$

其中

$$\zeta^{(g)} = \begin{pmatrix} \zeta_1^{(g)} \\ \zeta_2^{(g)} \\ \vdots \\ \zeta_l^{(g)} \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_l \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

分别为新、旧矢量的矩阵形式.

再取 L_l 中的另一矢量 $\eta\,(\eta_\mu, \mu = 1, 2, \cdots, l)$, 同样有

$$\eta_\mu^{(g)} = \sum_\alpha D_{\mu\alpha}\,(g)\,\eta_\alpha \quad (g \in G) \tag{2.16a}$$

或

$$\eta^{(g)} = D\,(g)\,\eta \quad (g \in G)\,, \tag{2.16b}$$

其中 $\eta^{(g)}$ 与 η 分别为新、旧矢量.

假设表示矩阵 $D\,(g)\,(g \in G)$ 不是幺正的, 下面来证明, 通过适当地选取表示空间 L_l 的基矢, 总可以将其幺正化. 为此考察内积

$$\sum_{g\in G}\left(\zeta^{(g)}, \eta^{(g)}\right) = \sum_{g\in G}\left[D\,(g)\,\zeta, D\,(g)\,\eta\right] = \left[\sum_{g\in G} D^\dagger\,(g)\,D\,(g)\,\zeta, \eta\right], \tag{2.17}$$

其中的 $\sum\limits_{g\in G} D^\dagger\,(g)\,D\,(g)$ 是厄米矩阵, 通过幺正矩阵 U 作相似变换, 可将其对角化, 即

$$d = U^{-1}\sum_{g\in G} D^\dagger\,(g)\,D\,(g)U, \tag{2.18a}$$

其中 d 为对角矩阵. 改写上式得

$$\sum_{g\in G} D^\dagger\,(g)\,D\,(g) = UdU^{-1}. \tag{2.18b}$$

由 (2.18b) 式, (2.17) 式变为

$$\sum_{g\in G}\left[D\,(g)\,\zeta, D\,(g)\,\eta\right] = \left(UdU^{-1}\zeta, \eta\right) = \left(dU^{-1}\zeta, U^{-1}\eta\right), \tag{2.19}$$

其中的第 2 等式用到了矩阵 U 的幺正性, 即 $U^\dagger = U^{-1}$.

在 (2.18a) 式中, 引入变换

$$D'\,(g) = U^{-1}D\,(g)\,U,$$

则

$$d = \sum_{g\in G} U^{-1}D^\dagger\,(g)\,UU^{-1}D\,(g)\,U = \sum_{g\in G} D'^\dagger\,(g)\,D'\,(g),$$

这样, 矩阵 d 的对角元为

$$d_{\mu\mu} = \sum_{g\in G}\sum_\alpha D'^\dagger_{\mu\alpha}\,(g)\,D'_{\alpha\mu}\,(g) = \sum_{g\in G}\sum_\alpha D'^*_{\alpha\mu}\,(g)\,D'_{\alpha\mu}\,(g) = \sum_{g\in G}\sum_\alpha \left|D'_{\alpha\mu}\,(g)\right|^2 > 0, \tag{2.20}$$

即对角元都是实数且是正定的, 因此有对角矩阵 $d^{1/2}$ 存在, 其元素为 $\left(d^{1/2}\right)_{\mu\mu} = \sqrt{d_{\mu\mu}}$. 这样, (2.19) 式变为

$$\sum_{g\in G}\left[D\left(g\right)\zeta,D\left(g\right)\eta\right]=\left(d^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}U^{-1}\zeta,U^{-1}\eta\right)=\left(d^{\frac{1}{2}}U^{-1}\zeta,d^{\frac{1}{2}}U^{-1}\eta\right),$$

其中的第 2 等式用到了矩阵 $d^{1/2}$ 的厄米性, 即 $d^{\dagger 1/2}=d^{1/2}$. 记

$$S=d^{\frac{1}{2}}U^{-1}, \tag{2.21}$$

则

$$\sum_{g\in G}\left[D\left(g\right)\zeta,D\left(g\right)\eta\right]=\left(S\zeta,S\eta\right). \tag{2.22}$$

再取 $g'\in G$, 由上式得

$$\begin{aligned}\left[SD\left(g'\right)\zeta,SD\left(g'\right)\eta\right]&=\sum_{g\in G}\left[D\left(g\right)D\left(g'\right)\zeta,D\left(g\right)D\left(g'\right)\eta\right]\\&\xlongequal{(2.6)式}\sum_{g\in G}\left[D\left(gg'\right)\zeta,D\left(gg'\right)\eta\right].\end{aligned}$$

由群的封闭性知, $gg'=g''\in G$, 这样

$$\left[SD\left(g'\right)\zeta,SD\left(g'\right)\eta\right]=\sum_{g''\in G}\left[D\left(g''\right)\zeta,D\left(g''\right)\eta\right]\xlongequal{(2.22)式}\left(S\zeta,S\eta\right).$$

作代换

$$\zeta'=S\zeta,\quad \eta'=S\eta, \tag{2.23}$$

上式变为

$$\left[SD\left(g'\right)S^{-1}\zeta',SD\left(g'\right)S^{-1}\eta'\right]=\left(\zeta',\eta'\right),$$

该式表明, 表示

$$D'\left(g'\right)=SD\left(g'\right)S^{-1}\quad\left(g'\in G\right) \tag{2.24}$$

是幺正的, 定理得证.

由此可见, 对于有限群, 若其表示 $D(G)$ 在某基矢下是非幺正的, 通过 (2.23) 式改变其表示空间的基矢, 相似变换后的表示 (2.24) 式就成为幺正的了. 这一过程的几何意义是很好理解的：原表示是非幺正的, 表明表示空间的基矢是斜交的. 对于有限群, 由 (2.20) 式知, 矩阵 $d^{1/2}$ 总是存在的, 所以变换矩阵 (2.21) 式, 即 $S=d^{1/2}U^{-1}$ 总是存在的. 通过该矩阵的变换, 基矢变成正交的, 该空间的表示矩阵也就幺正化了.

推论 2.1 若群 G 的两个幺正表示 $D'(G)$ 与 $D(G)$ 是等价的, 即

$$D'(g) = S^{-1} D(g) S \quad (g \in G), \tag{2.25}$$

则变换矩阵 S 必是幺正的.

证明　由上面的讨论知, 一般情况下的相似变换矩阵 S 由 (2.21) 式给出, 为 $S = d^{1/2} U^{-1}$, 其中的 U 矩阵是幺正的, $d^{1/2}$ 是对角矩阵. 由 (2.18a) 式知, 在 $D(G)$ 为幺正的情况下, $d^{1/2}$ 是一常数矩阵

$$d^{1/2} = \sqrt{n} I, \tag{2.26}$$

其中 n 是群 G 的阶, I 是 $l \times l$ 单位矩阵. 这样, 相似变换矩阵 (2.21) 式变为

$$S = \sqrt{n} U^{-1}, \tag{2.27}$$

是幺正的 (注：常数 $\sqrt{n}$ 可通过归一化常数矩阵 $d^{1/2}$ 而消除掉), 证毕.

该推论的几何意义是显然的：由于 $D(G)$ 是幺正的, 则由 2.1.3 节的讨论知, 其表示空间是正交的, 再由 2.1.4 节的讨论知, 该空间的相似变换矩阵 S 是幺正的.

例 2.1　D_3 群的两个一维表示.

D_3 群与 $Z_1 = \{1\}$ 同态, 故矩阵群 Z_1 (一维且只有一个单位元 1) 构成 D_3 的一个一维表示, 各群元素的表示矩阵为

$$D^{(0)}(e) = D^{(0)}(a) = D^{(0)}(b) = D^{(0)}(c) = D^{(0)}(d) = D^{(0)}(f) = 1, \tag{2.28}$$

即各群元素的表示矩阵都是单位矩阵 I (一维时即为 1), 该表示是 D_3 群的恒等表示或平庸表示.

由例 1.22 知, D_3 群与二阶循环群 $Z_2 = \{1, -1\}$ 同态. 其元素的同态对应关系为

$$\{e, d, f\} \Rightarrow 1, \quad \{a, b, c\} \Rightarrow -1,$$

所以 Z_2 构成 D_3 群的另一个一维 (非平庸) 表示. 各群元素的表示矩阵为

$$\begin{aligned} &D^{(1)}(e) = D^{(1)}(d) = D^{(1)}(f) = 1, \\ &D^{(1)}(a) = D^{(1)}(b) = D^{(1)}(c) = -1. \end{aligned} \tag{2.29}$$

例 2.2　D_3 群的三维表示.

建立如图 2.1(e) 所示的直角坐标系 (实线坐标轴), 坐标原点在等边三角形的中心 O 处, x 轴平行于底边水平向右, y 轴沿 a 轴向上, 三个坐标基矢分别为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ (注：按习惯, 坐标空间中的矢量用黑斜体字母表示, 全文同), 构成 D_3 群的三维表示空间 L_3. 在图 2.1 的六个分图中, 变换前的旧坐标系用实线坐标轴表示. 完成 D_3 群各元素操作后的新坐标系用点线坐标轴表示. 新坐标系中的 1、2 基矢只是

在 xOy 平面内变化, 第 3 新基矢或者与原来的同向或者反向. 为清楚起见, 同向或反向时分别在原坐标轴正向一侧, 用一短的同向或反向点线箭头表示.

D_3 群各元素的表示矩阵由 (2.5) 式给出, 为

$$D^{(3)}_{\mu\nu}(g) = (\boldsymbol{e}_\mu, g\boldsymbol{e}_\nu) = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu \quad (g \in D_3), \tag{2.30}$$

右边内积中的第 1 项为旧基矢, 第 2 项 $g\boldsymbol{e}_\nu = \boldsymbol{e}'_\nu$ 为新基矢. 由 (2.30) 式并结合图 2.1, 就可以求出 D_3 群三维表示的矩阵群.

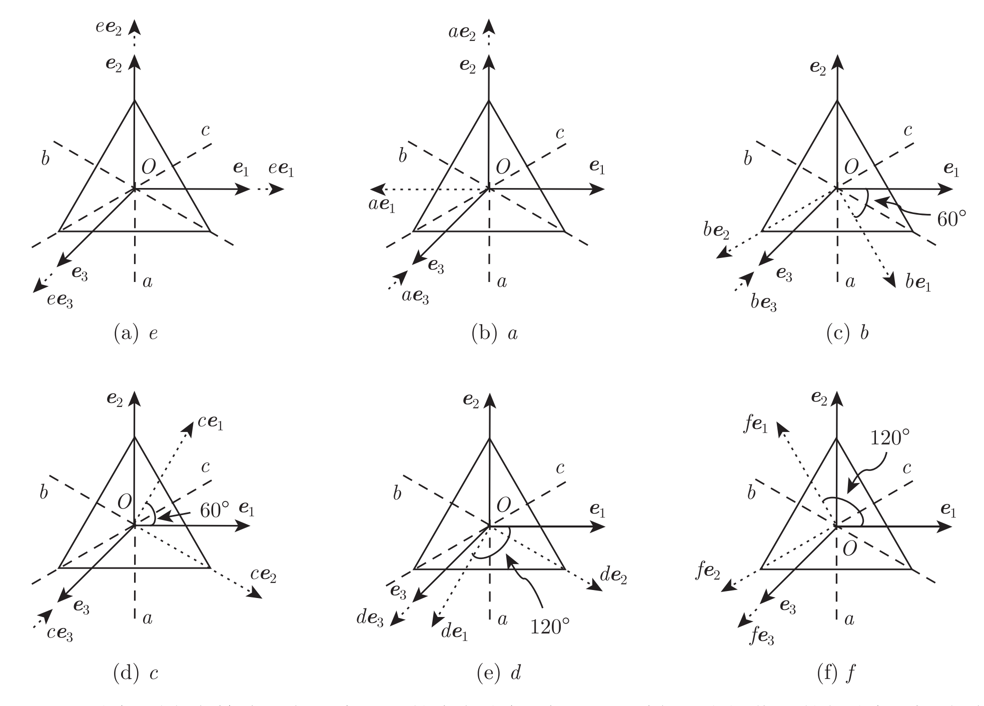


图 2.1　坐标原点在等边三角形中心处的直角坐标系及 D_3 群各元素操作后的新坐标系 (点线)

(1) 由 (2.30) 式与图 2.1(a) 知

$$D^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

这是显然的. 因为由 (2.1) 式知, 单位元的表示矩阵是单位矩阵.

(2) 由 (2.30) 式与图 2.1(b) 知

$$D^{(3)}_{11}(a) = \cos 180^\circ = -1, \quad D^{(3)}_{22}(a) = \cos 0^\circ = 1, \quad D^{(3)}_{33}(a) = \cos 180^\circ = -1,$$

其他各矩阵元都为零, 得

$$D^{(3)}(a)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

(3) 由 (2.30) 式与图 2.1(c) 知

$$D_{11}^{(3)}(b)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\quad D_{22}^{(3)}(b)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad D_{33}^{(3)}(b)=\cos 180^\circ=-1,$$

$$D_{12}^{(3)}(b)=\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad D_{21}^{(3)}(b)=\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

其他各矩阵元都为零, 得

$$D^{(3)}(b)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

(4) 由 (2.30) 式与图 2.1(d) 知

$$D_{11}^{(3)}(c)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\quad D_{22}^{(3)}(c)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad D_{33}^{(3)}(c)=\cos 180^\circ=-1,$$

$$D_{12}^{(3)}(c)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad D_{21}^{(3)}(c)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

其他各矩阵元都为零, 得

$$D^{(3)}(c)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

(5) 由 (2.30) 式与图 2.1(e) 知

$$D_{11}^{(3)}(d)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad D_{22}^{(3)}(d)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad D_{33}^{(3)}(d)=\cos 0^\circ=1,$$

$$D_{12}^{(3)}(d)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad D_{21}^{(3)}(d)=\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

其他各矩阵元都为零, 得

$$D^{(3)}(d)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

(6) 由 (2.30) 式与图 2.1(f) 知

$$D_{11}^{(3)}(f)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad D_{22}^{(3)}(f)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad D_{33}^{(3)}(f)=\cos 0^\circ=1,$$

$$D_{12}^{(3)}(f)=\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad D_{21}^{(3)}(f)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

其他各矩阵元都为零. 故

$$D^{(3)}(f)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

综合以上所得, D_3 群的三维表示矩阵群为

$$D^{(3)}(e)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad D^{(3)}(a)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$D^{(3)}(b)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad D^{(3)}(c)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

$$D^{(3)}(d)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad D^{(3)}(f)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

简单的计算可知, 以上六矩阵都是幺正的, 这是显然的, 因为坐标系变换前后都是正交的, 由 2.1.3 节的讨论知, 表示矩阵一定是幺正的.

2.2　群的可约表示与不可约表示

在介绍群的可约表示与不可约表示之前, 先介绍矩阵的两种运算: 一种是直和, 另一种是直积, 二者在后面的相关讨论中将经常用到.

2.2.1　矩阵的直和

设 $A=\{A_{ij},i、j=1,2,\cdots,k\}$ 为 k 阶方阵, $B=\{B_{ij},i、j=1,2,\cdots,m\}$ 为 m 阶方阵, 则两者的直和为 $k+m$ 阶分块对角化方阵

$$A\oplus B=\begin{pmatrix} A & 0_1 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{matrix}}^{k\text{列}} & \overbrace{\begin{matrix} \\ & & 0_1 & & \\ \\ \end{matrix}}^{m\text{列}} \\ 0_2 & \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{matrix} \end{array}\right)\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ k\text{行} \\ \\ \end{matrix}\right\} \\ \left.\begin{matrix} \\ m\text{行} \\ \\ \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \tag{2.38}$$

其中 0_1 是 $k\times m$ 零矩阵, 0_2 是 $m\times k$ 零矩阵. 例如, 若取

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

则

$$A\oplus B=\begin{pmatrix} A & 0_1 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

$$B\oplus A=\begin{pmatrix} B & 0_1 \\ 0_2 & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

显然

$$A\oplus B\neq B\oplus A, \tag{2.42}$$

即直和矩阵的次序不可交换.

类似地可得多个方阵的直和, 如

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots = \sum_i {}^{\oplus} A_i, \tag{2.43}$$

直和后的矩阵, 除沿主对角线的方块中有非零矩阵元外, 其他各处的矩阵元都为零, 即直和后的矩阵是分块对角化的且是方阵, 阶数等于各直和因子方阵的阶数之和.

矩阵的直和有如下三方面性质:

(1) $\det(A \oplus B) = \det A \det B.$ (2.44)

(2) $\mathrm{Tr}(A \oplus B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B.$ (2.45)

(3) 若 A_1、A_2 为两个同阶方阵, B_1、B_2 为另两个同阶方阵, 则

$$(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = (A_1 A_2) \oplus (B_1 B_2). \tag{2.46}$$

证明 上面的 (1)、(2) 是显然的, 性质 (3) 的证明是简单的. 因为

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0_1 \\ 0_2 & B \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned}(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) &= \begin{pmatrix} A_1 & 0_1 \\ 0_2 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & 0_1 \\ 0_2 & B_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0_1' \\ 0_2' & B_1 B_2 \end{pmatrix} = (A_1 A_2) \oplus (B_1 B_2),\end{aligned}$$

其中的 0_1、0_2、$0_1'$、$0_2'$ 都是零矩阵, 证毕.

2.2.2 矩阵的直积

设 A 与 B 分别为 $k \times m$ 与 $p \times q$ 矩阵, 即

$$A = \{A_{ij}, i = 1, 2, \cdots, k; j = 1, 2, \cdots, m\},$$

$$B = \{B_{ij}, i = 1, 2, \cdots, p; j = 1, 2, \cdots, q\},$$

则 A 与 B 的直积是 $kp \times mq$ 矩阵

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1m}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1}B & A_{k2}B & \cdots & A_{km}B \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

其中 $A_{km}B$ 是 $p \times q$ 矩阵, 即

$$A_{km}B = \begin{pmatrix} A_{km}B_{11} & A_{km}B_{12} & \cdots & A_{km}B_{1q} \\ A_{km}B_{21} & A_{km}B_{22} & \cdots & A_{km}B_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{km}B_{p1} & A_{km}B_{p2} & \cdots & A_{km}B_{pq} \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

由上式可以看出, 两矩阵直积的行与列分别由两个指标确定, 如

$$(A \otimes B)_{kp,mq} = A_{km}B_{pq}, \tag{2.49}$$

可见, 两矩阵直积中的两个行指标 kp 与两个列指标 mq 分属第 1、2 矩阵的行指标与列指标, 两行或两列指标的次序不可交换. 例如, 对于 (2.39) 式的 A 与 B, 其直积为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

而矩阵元, 如

$$(A \otimes B)_{12,12} = A_{11}B_{22}, \quad (A \otimes B)_{21,12} = A_{21}B_{12}.$$

另

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} B_{11}A & B_{12}A \\ B_{21}A & B_{22}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}A_{11} & B_{11}A_{12} & B_{12}A_{11} & B_{12}A_{12} \\ B_{11}A_{21} & B_{11}A_{22} & B_{12}A_{21} & B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} & B_{21}A_{12} & B_{22}A_{11} & B_{22}A_{12} \\ B_{21}A_{21} & B_{21}A_{22} & B_{22}A_{21} & B_{22}A_{22} \end{pmatrix},$$

显然

$$A \otimes B \neq B \otimes A, \tag{2.50}$$

矩阵直积不具可交换性.

类似地, 矩阵直积的概念可推广到多个矩阵的情况

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots = \prod_i{}^{\otimes} A_i. \tag{2.51}$$

矩阵的直积有如下四方面性质:

(1) 结合律：$A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$. (2.52)

(2) 分配律：$A\otimes(B+C)=(A\otimes B)\ +\ (A\otimes C)$. (2.53)

(3) $\mathrm{Tr}\,(A\otimes B)=\mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B$. (2.54)

(4) 若 A_1、A_2 为两个同阶方阵, B_1、B_2 为另两个同阶方阵, 则

$$(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=(A_1A_2)\otimes(B_1B_2)\,. \tag{2.55}$$

证明 (1)、(2) 是显然的. 对于性质 (3)

$$\mathrm{Tr}\,(A\otimes B)=\sum_{ij}(A\otimes B)_{ij,ij}=\sum_{ij}A_{ii}B_{jj}=\mathrm{Tr}A\mathrm{Tr}B,\quad\Rightarrow\ \text{成立}.$$

对于性质 (4), 由于

$$\begin{aligned}\left[(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)\right]_{ij,km}&=\sum_{pq}(A_1\otimes B_1)_{ij,pq}(A_2\otimes B_2)_{pq,km}\\&=\sum_{pq}A_{1ip}B_{1jq}A_{2pk}B_{2qm}.\end{aligned}$$

又

$$\left[(A_1A_2)\otimes(B_1B_2)\right]_{ij,km}=(A_1A_2)_{ik}(B_1B_2)_{jm}=\sum_{pq}A_{1ip}A_{2pk}B_{1jq}B_{2qm}.$$

比较以上两式知, 性质 (4) 或 (2.55) 式成立.

2.2.3 群的可约表示与不可约表示

设在群 G 的 l 维线性表示空间 L_l 中, 有 $k\,(k<l)$ 维子空间 L_k, 若 L_k 在群 G 的表示 $D\,(g)\,(g\in G)$ 的变换下不变, 即对于任一矢量 $\zeta\in L_k$, 都有 $D\,(g)\zeta\in L_k$, 则称 L_k 为 L_l 在 G 下的不变子空间, 而称表示 $D\,(G)$ 是可约的 (reducible). 适当地选取表示空间的基矢, 例如, 取 L_l 中的头 k 个基矢为不变子空间 L_k 的基矢, 则可约表示矩阵具有形式

$$D\,(g)=\begin{array}{c}\overbrace{\qquad}^{}\ k\text{列}\quad\overbrace{\qquad}^{}\ l-k\text{列}\\\begin{pmatrix}D'\,(g) & X\,(g)\\ \\ 0 & D''\,(g)\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}k\\\text{行}\end{array}\right\}\\\left.\begin{array}{c}l-k\\\text{行}\end{array}\right\}\end{array}, \tag{2.56}$$

其中 $D'\,(g)$ 为 $k\times k$ 方阵, $D''\,(g)$ 为 $(l-k)\times(l-k)$ 方阵, $X\,(g)$ 为 $k\times(l-k)$ 矩阵, 0 为 $(l-k)\times k$ 零矩阵. 在 $D\,(g)$ 的变换下, 基矢变换为

$$\left(e'_1,e'_2,\cdots,e'_k,e'_{k+1},\cdots,e'_l\right)=(e_1,e_2,\cdots,e_k,e_{k+1},\cdots,e_l)\,D\,(g)\,,$$

这样

$$(e'_1, e'_2, \cdots, e'_k) = (e_1, e_2, \cdots, e_k)\, D'(g) \in L_k, \tag{2.57}$$

即子空间 L_k 中的基矢经 $D(g)$ 变换后仍处于 L_k 中. 这样, 对于 L_k 中的任一矢量 $\zeta(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k) \in L_k$, 经 $D(g)$ 变换后, 变为

$$D(g)\,\zeta = D'(g)\,\zeta \in L_k \quad (g \in G), \tag{2.58}$$

所以 L_k 是 L_l 在 G 下的不变子空间.

(2.56) 式的右上三角可约表示矩阵是在表示空间 L_l 中的基矢作适当变换, 即假设 L_l 中的头 k 个基矢构成不变子空间 L_k 得到的. 而由前面 2.1.4 节的讨论知, 若基矢经由某变换由旧基矢变成新基矢, 表示矩阵将经受一个相似变换. 因此有结论：若群 G 的表示矩阵 $D(G)$ 是可约的, 则它总可以通过相似变换变成如 (2.56) 式所示的右上三角 (或左下三角) 的形式. 反之, 若 $D(G)$ 是不可约的 (irreducible), 则任何相似变换都不能使它变成上述形式. 因此表示矩阵 $D(G)$ 能否通过相似变换变成右上三角 (或左下三角) 的形式, 可看成是 $D(G)$ 是否可约的判据.

进一步可证明, 若表示 $D(G)$ 是幺正的, 则与 L_k 正交的子空间 L_{l-k} 也是不变子空间. 实际上, 若假设

$$\zeta \in L_k, \quad \eta \in L_{l-k}, \quad \Rightarrow (\zeta, \eta) = 0.$$

由于 L_k 是不变子空间, 对于 $g \in G$, 有

$$(D(g)\,\zeta, \eta) = 0, \tag{2.59}$$

又 $D(g)$ 是幺正的, 所以

$$(D(g)\,\zeta, \eta) = \left(\zeta, D^{\dagger}(g)\,\eta\right) = \left(\zeta, D^{-1}(g)\,\eta\right) = \left(\zeta, D\left(g^{-1}\right)\eta\right) = (\zeta, D(g')\,\eta) = 0,$$

其中 $g^{-1} = g' \in G$, 上式最后一步表明

$$D(g')\,\eta \in L_{l-k} \quad (g' \in G), \tag{2.60}$$

即 L_{l-k} 为不变子空间, 结论得证. 这样, 若将表示空间 L_l 中的头 k 个基矢取在不变子空间 L_k 中, 而将其余的 $l-k$ 个基矢取在不变子空间 L_{l-k} 中, 则幺正表示矩阵 $D(G)$ 可写成分块对角化的形式

$$D(g)=\begin{pmatrix} \overbrace{D'(g)}^{k\text{列}} & \overbrace{0_1}^{l-k\text{列}} \\ 0_2 & D''(g) \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} k \\ \text{行} \end{matrix}\right\} \\ \left.\begin{matrix} l-k \\ \text{行} \end{matrix}\right\} \end{matrix}, \tag{2.61}$$

其中 0_1 与 0_2 都是零矩阵. 在该情况下, 我们说表示矩阵 $D(G)$ 是完全可约的 (completely reducible). 接下来, 若 $D'(g)$ 与 $D''(g)$ 仍可约, 即子空间 L_k 与 L_{l-k} 还包含不变子空间, 则继续照此分解下去, 直到 L_l 的每一子空间不再可约化为止. 适当地选取表示空间的基矢, 表示矩阵 $D(G)$ 将具有如下的分块对角化形式:

$$D(g)=\begin{pmatrix} D^{(0)}(g) & & & 0_1 \\ & D^{(1)}(g) & & \\ & & \ddots & \\ 0_2 & & & D^{(r-1)}(g) \end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

当完成了 $D(g)$ 的这种完全约化后, 准对角线上的各 “元素”$D^{(0)}(g)$, $D^{(1)}(g),\cdots$, $D^{(r-1)}(g)$ 都成为群 G 的较低维的不可约表示 (注: 这里假设共有 r 个), 而称 $D(g)$ 为完全可约表示. 由于有限群的任一表示都等价于一幺正表示, 因此有结论: 有限群的表示要么完全可约, 要么不可约.

根据矩阵直和定义的 (2.38) 式, 完全可约表示 (2.62) 可以写成一系列不可约表示的直和, 即

$$D(g)=a_0D^{(0)}(g)\oplus a_1D^{(1)}(g)\oplus\cdots=\sum_i{}^{\oplus}a_iD^{(i)}(g)\quad(g\in G), \tag{2.63}$$

其中 a_i 是不可约表示 $D^{(i)}(g)$ 在 $D(g)$ 中出现的次数, 满足条件

$$\sum_i a_i=r.$$

可见, 不可约表示是群的基本表示, 求给定群表示的关键在于求出它的所有不等价不可约表示.

例 2.3 在例 2.1 与例 2.2 中曾分别求得 D_3 群的一个非平庸一维表示 (2.29) 式与三维表示 (2.37) 式. 比较两式知

$$D^{(3)}(D_3)=D^{(2)}(D_3)\oplus D^{(1)}(D_3), \tag{2.64}$$

其中 $D^{(2)}(D_3)$ 是 D_3 群的二维表示

$$\begin{aligned}
&D^{(2)}(e)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad D^{(2)}(a)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\
&D^{(2)}(b)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad D^{(2)}(c)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\\
&D^{(2)}(d)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad D^{(2)}(f)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{2.65}$$

它们与 D_3 群同构, 保持乘法规则不变, 如

$$D^{(2)}(a)\,D^{(2)}(b)=D^{(2)}(d)\,,\quad D^{(2)}(b)\,D^{(2)}(a)=D^{(2)}(f)\,,\tag{2.66}$$

与表 1.1 中的 $ab=d$, $ba=f$ 具有相同的代数运算结果. (2.65) 式的二维表示不再可约了, 因为若假设它们仍可约, 则由于它们的幺正性, 由前面的讨论知, 可通过一幺正算符 U 作相似变换将它们对角化, 即

$$U^{-1}D^{(2)}(g_i)\,U=d_i,\quad \Rightarrow D^{(2)}(g_i)=Ud_iU^{-1}\quad (g_i\in D_3)\,,$$

其中 d_i 是二阶对角矩阵, 对角元素是一些常数, 因此可对易. 这样

$$D^{(2)}(g_i)\,D^{(2)}(g_j)=Ud_id_jU^{-1}=Ud_jd_iU^{-1}=D^{(2)}(g_j)\,D^{(2)}(g_i)\,,\tag{2.67}$$

即 $D^{(2)}(D_3)$ 中的各矩阵相互对易, 这与 $D^{(2)}(D_3)$ 的同构要求, 如 (2.66) 式相矛盾, 所以二维表示 $D^{(2)}(D_3)$ 是不可约的. 可见, D_3 群的三维表示 $D^{(3)}(D_3)$ 实际上是二维不可约表示 $D^{(2)}(D_3)$ 与非平庸一维不可约表示 $D^{(1)}(D_3)$ 的直和.

2.3　舒 尔 定 理

下面来介绍两个重要的舒尔 (Schur) 定理, 二者在后面的相关讨论中将经常用到.

定理 2.2——舒尔定理 1　若矩阵 M 与群 G 的所有不可约表示矩阵 $D(G)$ 都对易, 即

$$MD(g)=D(g)\,M\quad (g\in G)\,,\tag{2.68}$$

则 M 必为常数矩阵

$$M = \lambda I, \tag{2.69}$$

其中 λ 为常数, I 为单位矩阵.

证明 设群 G 的表示空间 L_l 是 l 维的, 则矩阵 M 应是 l 阶方阵, 因此存在 l 个本征值, 其中有可能是相同或简并的. 取某一本征值 λ, 设其简并度为 k, 与其对应的本征矢量的集合为 $\{e_\mu, \mu = 1, 2, \cdots, k\}$, 即

$$Me_\mu = \lambda e_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots, k)\,. \tag{2.70}$$

用 $\{e_\mu, \mu=1, 2, \cdots, k\}$ 构成 L_l 的子空间 L_k, 则对于其中的任一矢量 $\zeta=\sum\limits_{\alpha=1}^{k}\zeta_\alpha e_\alpha \in L_k$, 有

$$M\zeta = \lambda\zeta.$$

由于 M 与所有的表示矩阵 $D\,(G)$ 都对易, 所以有关系

$$MD\,(g)\,\zeta = D\,(g)\,M\zeta = D\,(g)\,\lambda\zeta = \lambda D\,(g)\,\zeta,$$

表明 $D\,(g)\,\zeta$ 仍然是 M 的本征值为 λ 的本征矢量, 所以

$$D\,(g)\,\zeta \in L_k \quad (g \in G)\,,$$

L_k 构成 L_l 的不变子空间. 但按假设, $D\,(G)$ 为不可约表示, 在表示空间 L_l 中不应存在不变子空间, 所以 L_k 或者是整个表示空间 L_l 或者为零矢量空间. 前者表明 L_l 中任意矢量都是 M 的本征值为 λ 的本征矢量, 因此 M 必为一如 (2.69) 式所示的常数矩阵. 后者表明 $M = 0$, 是 (2.69) 式中 $\lambda = 0$ 的特殊情况, 定理得证.

由于可约表示存在两个及以上的不变子空间, 由舒尔定理 1 知, 总可以找到这样的矩阵 M, 使 M 在各不变子空间中的本征值取常数. 由于不同子空间对应于 M 的不同本征值, 这时的 M 不再是常数矩阵, 即

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & 0_1 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0_2 & & & \lambda_{r-1} \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

它与可约表示矩阵 (2.62) 式对易.

这样, 可约表示总可以找到和它对易的非常数矩阵. 据此得判断一个表示是否可约的判据：先找到满足对易条件

$$MD\,(g) = D\,(g)\,M \quad (g \in G) \tag{2.72}$$

的矩阵 M, 若 M 是常数矩阵, 则 $D(G)$ 必是不可约的; 反之, 若 M 不是常数矩阵, 则 $D(G)$ 必是可约的.

定理 2.3——舒尔定理 2　设 $D^{(1)}(G)$ 和 $D^{(2)}(G)$ 是群 G 的两个不可约表示, 其表示空间分别是 l_1 与 l_2 维. 若对于任意的 $g \in G$, 存在一个 $l_2 \times l_1$ 矩阵 M 并满足关系

$$MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)\,M, \tag{2.73}$$

则

(1) 当 $l_1 = l_2$ 时, 要么 $M = 0$, 要么 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$ 等价.

(2) 当 $l_1 \neq l_2$ 时, $M = 0$.

证明　对 (2.73) 式两边取厄米共轭得

$$D^{(1)\dagger}(g)\,M^\dagger = M^\dagger D^{(2)\dagger}(g),$$

对于有限群, 其表示矩阵与幺正矩阵等价, 上式变为

$$D^{(1)-1}(g)\,M^\dagger = M^\dagger D^{(2)-1}(g),$$

或

$$D^{(1)}\left(g^{-1}\right)M^\dagger = M^\dagger D^{(2)}\left(g^{-1}\right), \quad \Rightarrow D^{(1)}(g')\,M^\dagger = M^\dagger D^{(2)}(g') \quad \left(g^{-1} = g' \in G\right).$$

用 M 左乘上式得

$$\begin{aligned} &MD^{(1)}(g')\,M^\dagger = MM^\dagger D^{(2)}(g'), \\ &\xrightarrow{(2.73)\text{式}} D^{(2)}(g')\,MM^\dagger = MM^\dagger D^{(2)}(g') \quad (g' \in G), \end{aligned}$$

由于 $D^{(2)}(g')$ 是群 G 的一个不可约表示, 由舒尔定理 1 知, $MM^\dagger$ 应为一常数矩阵, 即

$$MM^\dagger = \lambda I_{l_2}, \tag{2.74}$$

其中 I_{l_2} 为 l_2 阶单位矩阵.

(1) 当 $l_1 = l_2$ 时, 若常数 $\lambda = 0$, 则 $MM^\dagger = 0$, 亦即

$$\sum_{\alpha=1}^{l_2} M_{\mu\alpha} M^\dagger_{\alpha\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \cdots, l_2),$$

或

$$\sum_{\alpha=1}^{l_2} |M_{\mu\alpha}|^2 = 0 \quad (\mu = 1, 2, \cdots, l_2),$$

亦即

$$M_{\mu\alpha}=0 \quad (\mu、\alpha=1,2,\cdots,l_2), \quad \Rightarrow M=0.$$

若常数 $\lambda\neq 0$, 则

$$\det\left(MM^{\dagger}\right)\xlongequal{(2.74)式}\det\left(\lambda I_{l_2}\right)=\lambda^{l_2}\neq 0, \tag{2.75}$$

又

$$\det\left(MM^{\dagger}\right)=\det M\det M^{\dagger}=\left|\det M\right|^2,$$

$$\xrightarrow{(2.75)式}\left|\det M\right|^2\neq 0, \quad \Rightarrow \det M\neq 0.$$

这样, M 的逆存在, (2.73) 式变为

$$D^{(1)}(g)=M^{-1}D^{(2)}(g)M \quad (g\in G), \tag{2.76}$$

表示 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$ 等价, 结论 (1) 得证.

(2) 当 $l_1\neq l_2$, 如 $l_1<l_2$ 时, 对矩阵 M 加上 l_2-l_1 列零, 变成 l_2 阶方阵 M', 即

$$M'=\begin{pmatrix} \overbrace{M}^{l_1列} & \overbrace{0}^{l_2-l_1列} \end{pmatrix}\left.\begin{matrix} l_2\\ 行\end{matrix}\right\}, \quad \Rightarrow M'^{\dagger}=\overbrace{\begin{pmatrix} M^{\dagger}\\ 0\end{pmatrix}}^{l_2列}\begin{matrix}\left.\begin{matrix} l_1\\ 行\end{matrix}\right\}\\ \left.\begin{matrix} l_2-l_1\\ 行\end{matrix}\right\}\end{matrix},$$

这时

$$M'M'^{\dagger}=MM^{\dagger}\xlongequal{(2.74)式}\lambda I_{l_2}. \tag{2.77}$$

由于

$$\det M'=0, \quad \Rightarrow \det\left(M'M'^{\dagger}\right)=\det M'\det M'^{\dagger}=\left|\det M'\right|^2=0=\lambda^{l_2},$$

故 $\lambda=0$, (2.77) 式变为

$$M'M'^{\dagger}=MM^{\dagger}=0, \quad \Rightarrow M=0,$$

结论 (2) 得证. 若 $l_1>l_2$, 则 (2.73) 式两边取厄米共轭, 注意到表示矩阵的幺正性, 并作代换 $M\Leftrightarrow M^{\dagger}$, 上述结论仍然成立.

例 2.4　类的和的表示矩阵是常数矩阵. 因为由 (1.67) 式知, 类的和 $c^{(i)}$ 与群 G 的任一元素都对易, 所以与它们相应的表示矩阵也对易, 则由舒尔定理 1 知, $c^{(i)}$ 的表示必为常数矩阵, 例如, 对于群 G 的不可约表示 $D^{(j)}(G)$, 有

$$D^{(j)}\left(c^{(i)}\right) \xlongequal{(1.65)\text{式}} \sum_{k=1}^{n_i} D^{(j)}(g_k) = \lambda_{(i)}^{(j)} I^{(j)} = \lambda_{(i)}^{(j)} D^{(j)}(g_0), \tag{2.78}$$

其中 $\lambda_{(i)}^{(j)}$ 为常数, 下角标 i 是类指标, 上角标 j 是表示的指标, 所以 $\lambda_{(i)}^{(j)} I^{(j)}$ 是第 i 个类的和 $c^{(i)}$ 的第 j 个常数表示矩阵. $I^{(j)} = D^{(j)}(g_0)$ 是表示矩阵 $D^{(j)}(G)$ 的单位矩阵, $g_0 \in G$ 为单位元.

具体到 D_3 群, 它的三个不等价不可约表示分别是 (2.28) 式的 $D^{(0)}(D_3)$, (2.29) 式的 $D^{(1)}(D_3)$ 与 (2.65) 式的 $D^{(2)}(D_3)$. 另由 (1.74) 式知, D_3 群有三个类: $C^{(0)} = \{e\}$, $C^{(1)} = \{d, f\}$, $C^{(2)} = \{a, b, c\}$, 各类的和分别为

$$c^{(0)} = e, \quad c^{(1)} = d + f, \quad c^{(2)} = a + b + c, \tag{2.79}$$

则在各不可约表示中, 各类的和的表示分别为

$$\begin{aligned}
&D^{(0)}\left(c^{(0)}\right) = 1, \quad \Rightarrow \lambda_{(0)}^{(0)} = 1; \quad D^{(0)}\left(c^{(1)}\right) = 2, \quad \Rightarrow \lambda_{(1)}^{(0)} = 2; \\
&D^{(0)}\left(c^{(2)}\right) = 3, \quad \Rightarrow \lambda_{(2)}^{(0)} = 3. \\
&D^{(1)}\left(c^{(0)}\right) = 1, \quad \Rightarrow \lambda_{(0)}^{(1)} = 1; \quad D^{(1)}\left(c^{(1)}\right) = 2, \quad \Rightarrow \lambda_{(1)}^{(1)} = 2; \\
&D^{(1)}\left(c^{(2)}\right) = -3, \quad \Rightarrow \lambda_{(2)}^{(1)} = -3. \\
&D^{(2)}\left(c^{(0)}\right) = I^{(2)}, \quad \Rightarrow \lambda_{(0)}^{(2)} = 1; \quad D^{(2)}\left(c^{(1)}\right) = -I^{(2)}, \quad \Rightarrow \lambda_{(1)}^{(2)} = -1; \\
&D^{(2)}\left(c^{(2)}\right) = 0, \quad \Rightarrow \lambda_{(2)}^{(2)} = 0.
\end{aligned}$$

其中 $I^{(2)}$ 为 2×2 单位矩阵. 可见在 D_3 群的各不可约表示中, 各类的和的表示均为常数矩阵, 与 (2.78) 式相一致.

2.4　不可约表示矩阵元的正交性定理

作为应用, 这里将根据舒尔定理导出不可约表示矩阵元的正交性定理 (orthogonal theorem), 这是一条重要的定理, 在群的表示论中有着重要的应用.

定理 2.4——正交性定理　设 G 是 n 阶有限群, 它有两个不等价不可约幺正表示 $D^{(i)}(G)$ 与 $D^{(j)}(G)$, 其表示空间分别为 l_i 与 l_j 维, 则两表示矩阵元间有正交关系

$$\sum_{g \in G} D_{\alpha\beta}^{(i)}(g)\, D_{\mu\nu}^{(j)*}(g) = \frac{n}{l_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}. \tag{2.80}$$

证明　(2.80) 式表明, 只有当两表示矩阵的三对指标——行指标、列指标及表示指标都分别相等时, 该式才不为零. 否则, 若其中之一不同, 将正交为零. 在三对指标都分别相等时, 该式变为

$$\sum_{g\in G}\left|D_{\mu\nu}^{(i)}(g)\right|^2=\frac{n}{l_i}, \tag{2.81}$$

表明各表示矩阵元的模方对于群元素的求和是同一常数 n/l_i.

分两种情况证明该定理.

(1) $i\neq j$.

设 X 是一个与群元素无关的任意 $l_i\times l_j$ 矩阵, 由其构造矩阵

$$M=\sum_{g\in G}D^{(i)}(g)XD^{(j)}\left(g^{-1}\right), \tag{2.82}$$

可证明它满足关系

$$D^{(i)}(g)M=MD^{(j)}(g)\quad(g\in G). \tag{2.83}$$

因为

$$\begin{aligned}
D^{(i)}(g)M&=D^{(i)}(g)\sum_{g'\in G}D^{(i)}(g')XD^{(j)}\left(g'^{-1}\right)\\
&=\sum_{g'\in G}D^{(i)}(g)D^{(i)}(g')XD^{(j)}\left(g'^{-1}\right)D^{(j)}\left(g^{-1}\right)D^{(j)}(g)\\
&=\sum_{g'\in G}D^{(i)}(gg')XD^{(j)}\left[(gg')^{-1}\right]D^{(j)}(g)\\
&\overset{gg'=g''}{=\!=\!=}\sum_{g''\in G}D^{(i)}(g'')XD^{(j)}\left(g''^{-1}\right)D^{(j)}(g)\\
&=MD^{(j)}(g),
\end{aligned}$$

(2.83) 式成立.

由于 $i\neq j$, 所以 $D^{(i)}(G)$ 与 $D^{(j)}(G)$ 是两个不同的不等价不可约表示, 由舒尔定理 2 知, M 是一个零矩阵, 即

$$M_{\alpha\mu}=\sum_{g\in G}\sum_{\sigma\rho}D_{\alpha\sigma}^{(i)}(g)X_{\sigma\rho}D_{\rho\mu}^{(j)}\left(g^{-1}\right)=0\quad(i\neq j). \tag{2.84}$$

由于矩阵 X 是任意的, 可将其取成

$$X_{\sigma\rho}=\delta_{\beta\sigma}\delta_{\nu\rho}, \tag{2.85}$$

即 X 除 β 行 ν 列的矩阵元为 1 外, 其余的都为零. 将 (2.85) 代入 (2.84) 式得

$$\sum_{g\in G} D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(j)}_{\nu\mu}\left(g^{-1}\right) = 0 \quad (i \neq j)\,. \tag{2.86}$$

对于幺正表示

$$D^{(j)}_{\nu\mu}\left(g^{-1}\right) = D^{(j)-1}_{\nu\mu}(g) = D^{(j)\dagger}_{\nu\mu}(g) = D^{(j)*}_{\mu\nu}(g)\,, \tag{2.87}$$

(2.86) 式可改写成

$$\sum_{g\in G} D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(j)*}_{\mu\nu}(g) = 0 \quad (i \neq j)\,, \tag{2.88}$$

故 $i \neq j$ 时, (2.80) 式成立.

(2) $i = j$.

在该情况下, (2.82) 式变为

$$M = \sum_{g\in G} D^{(i)}(g)\, X D^{(i)}\left(g^{-1}\right),$$

(2.83) 式变为

$$D^{(i)}(g)\, M = M D^{(i)}(g) \quad (g \in G)\,,$$

则由舒尔定理 1 知, 此时的 M 为一常数矩阵, 即

$$M_{\alpha\mu} = \sum_{g\in G}\sum_{\sigma\rho} D^{(i)}_{\alpha\sigma}(g)\, X_{\sigma\rho} D^{(i)}_{\rho\mu}\left(g^{-1}\right) = \lambda\delta_{\alpha\mu}, \tag{2.89}$$

由于 X 矩阵的任意性, 仍可将其取成 (2.85) 式的形式, 将其代入上式得

$$\sum_{g\in G} D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(i)}_{\nu\mu}\left(g^{-1}\right) = \lambda\delta_{\alpha\mu}. \tag{2.90}$$

为了确定上式中的常数 λ, 取 $\mu = \alpha$, 并将上式两边对 α 由 1 到 l_i 求和得

$$\sum_{g\in G}\sum_{\alpha=1}^{l_i} D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(i)}_{\nu\alpha}\left(g^{-1}\right) = \lambda l_i, \quad \Rightarrow \sum_{g\in G} D^{(i)}_{\nu\beta}\left(g^{-1}g\right) = \lambda l_i,$$

注意到单位元的表示矩阵是单位矩阵, 上式变为

$$n\delta_{\beta\nu} = \lambda l_i, \quad \Rightarrow \lambda = \frac{n}{l_i}\delta_{\beta\nu},$$

代入 (2.90) 并利用 (2.87) 式, 得

$$\sum_{g\in G} D^{(i)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(i)*}_{\mu\nu}(g) = \frac{n}{l_i}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}. \tag{2.91}$$

(2.88) 与 (2.91) 式合在一起就是正交性定理 (2.80) 式, 定理得证.

记

$$A_{\alpha\beta}^{(i)}(g)=\sqrt{\frac{l_i}{n}}D_{\alpha\beta}^{(i)}(g), \tag{2.92}$$

则正交关系 (2.80) 式可变写成

$$\sum_{g\in G}A_{\alpha\beta}^{(i)}(g)\,A_{\mu\nu}^{(j)*}(g)=\delta_{ij}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}. \tag{2.93}$$

可见, 正交性定理实际上描述的是矢量集合

$$\left\{A_{\alpha\beta}^{(i)}(G)\,,i=0,1,\cdots,r-1;\alpha、\beta=1,2,\cdots,l_i\right\} \tag{2.94}$$

的正交归一关系. 该组矢量由 i,α,β 三个指标标志, 其中 i 是不可约表示的指标, 这里与前面一样, 假设群 G 共有 r 个不等价不可约表示; α,β 是表示矩阵的矩阵元指标, 对于 l_i 维不可约表示 $D^{(i)}(G)$, 共有 l_i^2 个矩阵元. 这样, (2.94) 式正交归一的矢量总数为 $\sum\limits_{i=0}^{r-1}l_i^2$ 个. 每一矢量有 n 个分量：$A_{\alpha\beta}^{(i)}(g_0)\,,A_{\alpha\beta}^{(i)}(g_1)\,,\cdots,A_{\alpha\beta}^{(i)}(g_{n-1})$, 所以 (2.94) 式是 n 维空间中的一组正交归一的矢量. 由于 n 维空间中正交归一的矢量不能超过 n 个, 故

$$\sum_{i=0}^{r-1}l_i^2\leqslant n, \tag{2.95}$$

后面的 2.6.3 节将证明

$$\sum_{i=0}^{r-1}l_i^2=n. \tag{2.96}$$

该式给出了群 G 的阶数 n 与其不等价不可约表示的数目 r 及各表示空间维数 l_i 之间的关系. 一般来说, 群的阶数越高, 不等价不可约表示越多, 最高维表示空间的维数越高.

例 2.5　由例 2.1 的讨论知, D_3 群有两个一维表示, 一个是平庸的 (2.28) 式 $D^{(0)}(D_3)$, 另一个是非平庸的 (2.29) 式 $D^{(1)}(D_3)$. 再由例 2.3 知, D_3 群还有一个如 (2.65) 式所示的二维不可约表示 $D^{(2)}(D_3)$, 则各不可约表示维数的平方和为

$$\sum_{i=0}^{2}l_i^2=1^2+1^2+2^2=6=n_{D_3},$$

其中 $n_{D_3}=6$ 为 D_3 群的阶, 上式与 (2.96) 式相一致. 可见, D_3 群有且仅有三个不等价不可约表示：两个一维, 一个二维, 不可能再有其他不可约表示存在.

又

$$\sum_{g\in D_3} D^{(0)}(g)\, D^{(0)*}(g) = 6 = \frac{n_{D_3}}{l_0}, \quad \sum_{g\in D_3} D^{(1)}(g)\, D^{(1)*}(g) = 6 = \frac{n_{D_3}}{l_1}, \tag{2.97}$$

其中 $l_0 = 1$、$l_1 = 1$ 分别为表示 $D^{(0)}(D_3)$ 与 $D^{(1)}(D_3)$ 的维数. 再

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in D_3} D^{(0)}(g)\, D^{(1)*}(g) = 0, \quad \sum_{g\in D_3} D^{(0)}(g)\, D^{(2)*}_{\mu\nu}(g) = 0,\\
&\sum_{g\in D_3} D^{(1)}(g)\, D^{(2)*}_{\mu\nu}(g) = 0,\\
&\sum_{g\in D_3} D^{(2)}_{\alpha\beta}(g)\, D^{(2)*}_{\mu\nu}(g) = 3\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} = \frac{n_{D_3}}{l_2}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} \quad (\alpha、\beta、\mu、\nu = 1, 2),
\end{aligned} \tag{2.98}$$

其中 $l_2 = 2$ 是 $D^{(2)}(D_3)$ 不可约表示的维数. (2.97) 与 (2.98) 两式表明, D_3 群的三个不等价不可约表示满足正交性定理 (2.80) 式.

2.5　表示的特征标

由前面 2.1.4 节的讨论知, 对于一定的表示空间, 若基矢选取的不同, 则得到的表示矩阵不相同, 这些不同的表示矩阵可通过相似变换相联系, 成为等价表示. 而等价表示是多种多样的, 所以表示矩阵在给定空间中的形式不是唯一的, 这是表示矩阵所存在的不足, 为了克服这一问题, 人们引入了表示的特征标的概念. 特征标与基矢的选取或相似变换无关, 是研究群表示的重要工具.

2.5.1　表示的特征标

设有 n 阶有限群

$$G = \{g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\},$$

其不可约表示矩阵为

$$D(G) = \{D(g_0), D(g_1), \cdots, D(g_{n-1})\},$$

则任一群元素, 如 g_i 的表示矩阵 $D(g_i)$ 的对角元素之和或迹, 称为 g_i 在 $D(G)$ 中的特征标 (character), 记为

$$\chi(g_i) = \mathrm{Tr}D(g_i) = \sum_{\alpha} D(g_i)_{\alpha\alpha} \quad (g_i \in G). \tag{2.99}$$

所以, 特征标是一个标量, 是我们所熟悉的矩阵之迹的另一种叫法. 而群 G 中所有群元素在 $D(G)$ 中的特征标的集合

$$\chi(G) = \{\chi(g_i), g_i \in G\}, \tag{2.100}$$

称为表示 $D(G)$ 的特征标系或简称为特征标.

2.5.2 特征标的性质

1. 等价表示的特征标相等

由矩阵求迹的轮换不变性知, 对于任意的矩阵 A、B、C 有

$$\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(BCA) = \mathrm{Tr}\,(CAB)\,, \tag{2.101}$$

这样, 对于表示 $D(g_i)$ 的等价表示

$$D'(g_i) = S^{-1}D(g_i)\,S,$$

有

$$\mathrm{Tr}D'(g_i) = \mathrm{Tr}\left[S^{-1}D(g_i)\,S\right] = \mathrm{Tr}\left[SS^{-1}D(g_i)\right] = \mathrm{Tr}D(g_i)\,. \tag{2.102}$$

可见相似变换不改变特征标, 某一表示在给定的表示空间的特征标是唯一确定的, 其取值只取决于表示本身, 与表示空间基矢的选取无关. 所以, 特征标是一个标志表示固有特征的量, 名之曰“特征标”.

2. 共轭元素的特征标相等

例如, 若群元素 g_k 与 g_m 共轭, 则有 g_i 存在, 使 $g_k = g_i g_m g_i^{-1}$, 则其相应的表示有关系

$$D(g_k) = D(g_i)\,D(g_m)\,D\left(g_i^{-1}\right) = D(g_i)\,D(g_m)\,D^{-1}(g_i)\,.$$

由 (2.101) 式得

$$\mathrm{Tr}D(g_k) = \mathrm{Tr}D(g_m)\,.$$

所以, 同一类中的各元素, 其表示的特征标相等, 特征标是类的函数.

2.5.3 特征标的正交性

定理 2.5 设元素 $g \in G$ 在不可约表示 $D^{(i)}(G)$ 与 $D^{(j)}(G)$ 中的特征标分别为 $\chi^{(i)}(g)$ 与 $\chi^{(j)}(g)$, 则二者满足正交关系

$$\sum_{g\in G}\chi^{(i)}(g)\,\chi^{(j)*}(g) = n\delta_{ij}, \tag{2.103}$$

其中 n 是群 G 的阶.

证明 由有限群不可约表示矩阵元的正交性定理 (2.80) 式知

$$\sum_{g\in G} D^{(i)}_{\alpha\alpha}(g)\,D^{(j)*}_{\mu\mu}(g) = \frac{n}{l_i}\delta_{ij}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\alpha\mu}. \tag{2.104}$$

两边同时对 α 与 μ 求和得

$$\sum_{g\in G}\chi^{(i)}(g)\,\chi^{(j)*}(g)=\frac{n}{l_i}\delta_{ij}\sum_{\alpha\mu}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\alpha\mu}=\frac{n}{l_i}\delta_{ij}\sum_{\alpha}\delta_{\alpha\alpha}=\frac{n}{l_i}\delta_{ij}l_i=n\delta_{ij},$$

正交关系 (2.103) 式得证.

在 (2.103) 式中, 令 $i=j$, 有

$$\sum_{g\in G}\chi^{(i)}(g)\,\chi^{(i)*}(g)=n. \tag{2.105}$$

上式是一个不可约表示的特征标所必须满足的关系, 可用作判断一个表示是否可约的条件. 即一个表示如果是不可约的, 则它的特征标必须满足上式; 反之, 若不满足上式, 它必是可约的.

由于特征标是类的函数, 即在给定类中的所有元素都有相同的特征标, 所以特征标正交关系 (2.103) 式可写成

$$\sum_{k=0}^{c-1}n_k\chi^{(i)}\left(g_{C^{(k)}}\right)\chi^{(j)*}\left(g_{C^{(k)}}\right)=n\delta_{ij}, \tag{2.106}$$

其中 n_k 为 $C^{(k)}$ 类中的元素数, $g_{C^{(k)}}\in C^{(k)}$ 是 $C^{(k)}$ 类中的任一元素, 求和是对类指标 $k=0,1,\cdots,c-1$ 进行的 (这里假设共有 c 个类). 记

$$A^{(i)}\left(C^{(k)}\right)=\sqrt{\frac{n_k}{n}}\chi^{(i)}\left(g_{C^{(k)}}\right),$$

则 (2.106) 式变为

$$\sum_{k=0}^{c-1}A^{(i)}\left(C^{(k)}\right)A^{(j)*}\left(C^{(k)}\right)=\delta_{ij}. \tag{2.107}$$

上式给出的是矢量集合

$$\left\{A^{(i)}(C),\ i=0,1,\cdots,r-1\right\} \tag{2.108}$$

的正交归一关系, 该组正交矢量 $A^{(i)}(C)$ 由不可约表示指标 i 标识, 按假设群 G 共有 r 个不等价不可约表示, 所以正交归一的矢量共有 r 个. 每一矢量有 c 个分量, 如 $A^{(i)}\left(C^{(0)}\right)$, $A^{(i)}\left(C^{(1)}\right)$, $\cdots$, $A^{(i)}\left(C^{(c-1)}\right)$, 所以 (2.108) 式是 c 维空间中的一组正交归一的矢量. 由于 c 维空间中正交归一的矢量不能超过 c 个, 所以

$$r\leqslant c, \tag{2.109}$$

后面 (2.6.3 节) 将证明

$$r=c, \tag{2.110}$$

即群 G 的不等价不可约表示的数目与其可分解的类的数目相等. 例如, D_3 群有三个不等价不可约表示 $D^{(0)}(D_3)$、$D^{(1)}(D_3)$ 与 $D^{(2)}(D_3)$ 分别由 (2.28)、(2.29) 与 (2.65) 三式给出. 另外, 由 (1.74) 式知, D_3 群可分解为三个类 $C^{(0)}$、$C^{(1)}$ 与 $C^{(2)}$. 不等价不可约表示与类各有三个, 数目相等, 与 (2.110) 式相一致.

例 2.6 由 (2.28)、(2.29) 及 (2.65) 式知, D_3 群有三个不可约表示 $D^{(0)}(D_3)$、$D^{(1)}(D_3)$ 与 $D^{(2)}(D_3)$. 第 1 个是一维平庸表示, 第 2 个是一维非平庸表示, 第 3 个是二维不可约表示. 三者的特征标分别为

$$\chi^{(0)}(e) = \chi^{(0)}(a) = \chi^{(0)}(b) = \chi^{(0)}(c) = \chi^{(0)}(d) = \chi^{(0)}(f) = 1, \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned} &\chi^{(1)}(e) = \chi^{(1)}(d) = \chi^{(1)}(f) = 1, \\ &\chi^{(1)}(a) = \chi^{(1)}(b) = \chi^{(1)}(c) = -1, \end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned} &\chi^{(2)}(e) = 2, \chi^{(2)}(a) = \chi^{(2)}(b) = \chi^{(2)}(c) = 0, \\ &\chi^{(2)}(d) = \chi^{(2)}(f) = -1. \end{aligned} \tag{2.113}$$

则有

$$\begin{aligned} &\sum_{g\in D_3} \chi^{(0)}(g)\,\chi^{(0)*}(g) = 6 = n_{D_3}, \\ &\sum_{g\in D_3} \chi^{(1)}(g)\,\chi^{(1)*}(g) = 6 = n_{D_3}, \\ &\sum_{g\in D_3} \chi^{(2)}(g)\,\chi^{(2)*}(g) = 6 = n_{D_3}. \end{aligned} \tag{2.114a}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{g\in D_3} \chi^{(0)}(g)\,\chi^{(1)*}(g) = 0, \\ &\sum_{g\in D_3} \chi^{(0)}(g)\,\chi^{(2)*}(g) = 0, \\ &\sum_{g\in D_3} \chi^{(1)}(g)\,\chi^{(2)*}(g) = 0. \end{aligned} \tag{2.114b}$$

可见, D_3 群的三个不等价不可约表示的特征标满足正交关系 (2.103) 式.

2.5.4 特征标表

由于特征标只是类的函数, 即在某一表示中, 同一类中各元素的特征标相等. 这样, 可将一个有限群的所有不等价不可约表示的特征标按类列成表, 如表 2.1 所示, 其中的 $g_{C^{(0)}}, g_{C^{(1)}}, \cdots, g_{C^{(r-1)}}$ 是各类中的任一元素.

由 (2.110) 式知, 表 2.1 是一个 $r \times r$ 方形表, 称为特征标表. 表中的每一行代表群的一个不可约表示在各类中的特征标, 而表中的每一列代表群的某一类在不同表示中的特征标. 通常, 特征标表中的第 1 行给出的是恒等表示在各类中的特征标, 第 1 列给出的是 $C^{(0)} = \{e\}$ 类在各表示中的特征标.

表 2.1　群 G 的不可约表示的特征标表

		类			
		$C^{(0)}$	$C^{(1)}$	$\cdots$	$C^{(r-1)}$
不可约表示	$D^{(0)}(G)$	$\chi^{(0)}(g_{C^{(0)}})$	$\chi^{(0)}(g_{C^{(1)}})$	$\cdots$	$\chi^{(0)}(g_{C^{(r-1)}})$
	$D^{(1)}(G)$	$\chi^{(1)}(g_{C^{(0)}})$	$\chi^{(1)}(g_{C^{(1)}})$	$\cdots$	$\chi^{(1)}(g_{C^{(r-1)}})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$D^{(r-1)}(G)$	$\chi^{(r-1)}(g_{C^{(0)}})$	$\chi^{(r-1)}(g_{C^{(1)}})$	$\cdots$	$\chi^{(r-1)}(g_{C^{(r-1)}})$

例 2.7　由 (1.74) 式知, D_3 群可分解为三个类

$$C^{(0)}=\{e\}\,,\quad C^{(1)}=\{d,f\}\,,\quad C^{(2)}=\{a,b,c\}\,, \tag{2.115}$$

又 D_3 群有三个不等价不可约表示分别是 (2.28) 式的一维平庸表示 $D^{(0)}(D_3)$, (2.29) 式的一维非平庸表示 $D^{(1)}(D_3)$ 及 (2.65) 式的二维不可约表示 $D^{(2)}(D_3)$. 其特征标表如表 2.2 所示, 为 3×3 方形表.

表 2.2　D_3 群的特征标表

		类		
		$C^{(0)}$	$C^{(1)}$	$C^{(2)}$
不可约表示	$D^{(0)}(D_3)$	1	1	1
	$D^{(1)}(D_3)$	1	1	-1
	$D^{(2)}(D_3)$	2	-1	0

2.5.5　不同类特征标的乘积展开

由 (1.66) 式知, 两类的和 $c^{(i)}$ 与 $c^{(j)}$ 的乘积展开为

$$c^{(i)}c^{(j)}=\sum_k a_{ijk}c^{(k)}, \tag{2.116}$$

其中 a_{ijk} 为类的和 $c^{(k)}$ 在 $c^{(i)}c^{(j)}$ 中出现的次数. 由上式可得类的和表示矩阵的乘积展开式, 例如, 在群 G 的不可约表示 $D^{(m)}(G)$ 中, 由 (2.116) 式得

$$D^{(m)}\left(c^{(i)}\right)D^{(m)}\left(c^{(j)}\right)=\sum_k a_{ijk}D^{(m)}\left(c^{(k)}\right). \tag{2.117}$$

再由 (2.78) 式知, 类的和的表示为常数矩阵, 如

$$D^{(m)}\left(c^{(i)}\right)=\lambda_{(i)}^{(m)}I^{(m)}=\lambda_{(i)}^{(m)}D^{(m)}(g_0)\,, \tag{2.118}$$

其中 $\lambda_{(i)}^{(m)}$ 为常数, 上、下角标 m 与 i 分别是表示与类的指标, $I^{(m)}$ 是表示 $D^{(m)}(G)$ 的单位矩阵, $g_0\in G$ 为群 G 的单位元. 这样, (2.117) 式变为

$$\lambda_{(i)}^{(m)}\lambda_{(j)}^{(m)}I^{(m)}=\sum_k a_{ijk}\lambda_{(k)}^{(m)}I^{(m)},$$

或

$$\lambda_{(i)}^{(m)}\lambda_{(j)}^{(m)}=\sum_k a_{ijk}\lambda_{(k)}^{(m)}. \tag{2.119}$$

另外, 类的和 $c^{(i)}$ 在给定表示, 如 $D^{(m)}(G)$ 中的特征标为

$$\chi^{(m)}\left(c^{(i)}\right)=n_i\chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right), \tag{2.120}$$

其中 n_i 为 $C^{(i)}$ 类中元素的个数, $g_{C^{(i)}}$ 为 $C^{(i)}$ 类中的任一元素. 再由 (2.118) 式知

$$\chi^{(m)}\left(c^{(i)}\right)=\lambda_{(i)}^{(m)}\chi^{(m)}\left(g_0\right)\overset{(2.120)\text{式}}{=\!=\!=}n_i\chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right),$$

故

$$\lambda_{(i)}^{(m)}=\frac{n_i\chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right)}{\chi^{(m)}\left(g_0\right)}=\frac{n_i\chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right)}{l_m}, \tag{2.121}$$

其中 $l_m=\chi^{(m)}\left(g_0\right)$ 为表示矩阵 $D^{(m)}(G)$ 的维数. 将 (2.121) 代入 (2.119) 式得

$$n_in_j\chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right)\chi^{(m)}\left(g_{C^{(j)}}\right)=l_m\sum_k a_{ijk}n_k\chi^{(m)}\left(g_{C^{(k)}}\right), \tag{2.122}$$

上式即为同一表示中两不同类特征标乘积的展开式.

2.5.6 可约表示的约化

设 $D(G)$ 是 n 阶有限群 G 的表示, 且是可约的, 由前面 2.2.3 节的讨论知, 该表示可按 (2.63) 式约化为 G 的不等价不可约表示的直和, 即

$$D(g)=\sum_i{}^{\oplus}a_iD^{(i)}(g)\quad (g\in G), \tag{2.123}$$

其中 a_i 为不可约表示 $D^{(i)}(g)$ 在 $D(g)$ 中出现的次数. 两边求迹, 并利用 (2.45) 式得

$$\chi(g)=\sum_i a_i\chi^{(i)}(g), \tag{2.124}$$

其中 $\chi^{(i)}(g)$ 为不可约表示 $D^{(i)}(g)$ 的特征标. 两边同乘 $\chi^{(j)*}(g)$, 并对 g 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}\chi(g)\chi^{(j)*}(g)&=\sum_i a_i\sum_{g\in G}\chi^{(i)}(g)\chi^{(j)*}(g)\\&\overset{(2.103)\text{式}}{=\!=\!=}\sum_i a_in\delta_{ij}=na_j,\end{aligned}$$

故

$$a_i=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi(g)\chi^{(i)*}(g). \tag{2.125}$$

由上式, 只要可约表示 $D(G)$ 的特征标已知, 就可求得某一不可约表示在其中出现的次数, 再按 (2.123) 式, 就可以完成对可约表示 $D(G)$ 的分解或约化.

例 2.8　由例 2.2 的讨论知, D_3 群有一个如 (2.37) 式所示的三维可约表示 $D^{(3)}(D_3)$, 各元素的特征标为

$$\chi^{(3)}(e)=3,\quad \chi^{(3)}(a)=\chi^{(3)}(b)=\chi^{(3)}(c)=-1,\quad \chi^{(3)}(d)=\chi^{(3)}(f)=0, \tag{2.126}$$

又由 (2.64) 式知, $D^{(3)}(D_3)$ 是 (2.65) 式的二维不可约表示 $D^{(2)}(D_3)$ 与 (2.29) 式的一维非平庸表示 $D^{(1)}(D_3)$ 的直和

$$D^{(3)}(D_3)=D^{(2)}(D_3)\oplus D^{(1)}(D_3), \tag{2.127}$$

两直和因子出现的次数都是 1, 即 $a_2=1, a_1=1$, 这一结果也可以由 (2.125) 式直接求出. 实际上, 由 (2.65) 与 (2.29) 式知, 各元素在不可约表示 $D^{(2)}(D_3)$ 与 $D^{(1)}(D_3)$ 中的特征标分别为

$$\chi^{(2)}(e)=2,\quad \chi^{(2)}(a)=\chi^{(2)}(b)=\chi^{(2)}(c)=0,\quad \chi^{(2)}(d)=\chi^{(2)}(f)=-1. \tag{2.128}$$

$$\chi^{(1)}(e)=1,\quad \chi^{(1)}(a)=\chi^{(1)}(b)=\chi^{(1)}(c)=-1,\quad \chi^{(1)}(d)=\chi^{(1)}(f)=1. \tag{2.129}$$

这样, 由 (2.125) 及以上诸式, 可得不可约表示 $D^{(2)}(D_3)$ 与 $D^{(1)}(D_3)$ 在 $D^{(3)}(D_3)$ 中出现的次数分别为

$$\begin{aligned}
a_2&=\frac{1}{6}\sum_{g\in D_3}\chi^{(3)}(g)\,\chi^{(2)*}(g)\\
&=\frac{1}{6}\left[\underbrace{3\times 2}_{e}+\underbrace{(-1)\times 0+(-1)\times 0+(-1)\times 0}_{a,b,c}+\underbrace{0\times(-1)+0\times(-1)}_{d,f}\right]=1,\\
a_1&=\frac{1}{6}\sum_{g\in D_3}\chi^{(3)}(g)\,\chi^{(1)*}(g)\\
&=\frac{1}{6}\left[\underbrace{3\times 1}_{e}+\underbrace{(-1)\times(-1)+(-1)\times(-1)+(-1)\times(-1)}_{a,b,c}+\underbrace{0\times 1+0\times 1}_{d,f}\right]=1,
\end{aligned}$$

与 (2.127) 式相一致.

2.6　有限群的正则表示

2.6.1　正则表示及其特征标

设 G 为 n 阶有限群 $G=\{g_i, i=1,2,\cdots,n\}$, 若将 G 的 n 个元素看作 n 维空

间中的坐标基矢, 则用群元素 g_p 左乘群中的所有元素, 相当于对 n 维空间的坐标轴作了一个转动操作. 转动前、后的坐标基矢有关系

$$g_p g_i = \sum_j D_{ji}^{\mathrm{reg}}(g_p)\, g_j, \tag{2.130}$$

其中的 $D^{\mathrm{reg}}(g_p)$ 为 $n \times n$ 方阵. 上式在形式上与 (2.3) 式相一致, 在那里, 基矢的变换矩阵 $D(G)$ 是群 G 的表示矩阵, 所以 (2.130) 式中的变换矩阵也是群 G 的一种表示. 实际上

$$g_q g_p g_i = \sum_j D_{ji}^{\mathrm{reg}}(g_p)\, g_q g_j = \sum_k \sum_j D_{ji}^{\mathrm{reg}}(g_p)\, D_{kj}^{\mathrm{reg}}(g_q)\, g_k.$$

又

$$g_q g_p g_i = \sum_k D_{ki}^{\mathrm{reg}}(g_q g_p)\, g_k,$$

故

$$D_{ki}^{\mathrm{reg}}(g_q g_p) = \sum_j D_{kj}^{\mathrm{reg}}(g_q)\, D_{ji}^{\mathrm{reg}}(g_p),$$

或

$$D^{\mathrm{reg}}(g_q g_p) = D^{\mathrm{reg}}(g_q)\, D^{\mathrm{reg}}(g_p), \tag{2.131}$$

保持群的乘法规则不变, 因此 $D^{\mathrm{reg}}(G)$ 构成群的一个表示, 称为正则表示 (regular representation). 每个有限群都有这样一个正则表示.

由 (2.130) 式知, 正则表示矩阵 $D^{\mathrm{reg}}(g_p)$ 的每一行每一列只有一个元素等于 1, 其余的都为零. 如对于给定的右乘因子 g_i(处在群的乘法表中的第 1 行, 参见表 1.1), 矩阵元的列号与该因子在乘法表中的列号相一致, 为 i. 如果 $g_p g_i = g_k$, 由 (2.130) 式左、右两边相等知, 只有 $D_{ki}(g_p) = 1$, 其余的 $D_{ji}(g_p) = 0 (j \neq k)$. 也就是说, 在第 i 列上的矩阵元中, 除了第 k 行的等于 1 外, 其余的都等于零. 可见, 行号 k 取决于乘积 $g_p g_i$ 所得群元素的编号, 该编号即为群的乘法表中的左乘因子 (乘法表中最左边一列, 参见表 1.1) 的行号. 取不同的群元素做右乘因子, 结论一样, 区别仅在于矩阵元为 1 的行、列号不同. 因为 g_i 不同, 列号不同; 乘积 $g_p g_i$ 不同, 行号也不同. 所以在表示矩阵 $D^{\mathrm{reg}}(g_p)$ 中, 每一行每一列除了一个元素等于 1 外, 其余的全为 0. 当 g_i 取遍所有的群元素时, 就得到群元素 g_p 的表示矩阵 $D^{\mathrm{reg}}(g_p)$; 当 g_p 取遍所有的群元素时, 就得到群 G 的正则表示 $D^{\mathrm{reg}}(G)$.

按照上述步骤, 结合 D_3 群的乘法表 1.1, 就可求得 D_3 群各元素的正则表示,

如

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{右乘因子 [列号]} \\
 & & \begin{array}{cccccc} e & a & b & c & d & f \end{array} \\
D^{\mathrm{reg}}(a)= \begin{array}{c}\text{左}\\\text{乘}\\\text{因}\\\text{子}\\\text{[行}\\\text{号]}\end{array} & \begin{array}{c} e\\ a\\ b\\ c\\ d\\ f \end{array} & \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \\
 & & \begin{array}{cccccc} a & e & d & f & b & c \end{array} \\
 & & (a\times \text{ 右乘因子的结果})
\end{array}
$$

同样的方法, 可求得其他元素的正则表示, 结果如下：

$$
D^{\mathrm{reg}}(e)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \quad
D^{\mathrm{reg}}(a)=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
D^{\mathrm{reg}}(b)=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad
D^{\mathrm{reg}}(c)=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
D^{\mathrm{reg}}(d)=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}, \quad
D^{\mathrm{reg}}(f)=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

按正则表示的定义, 可得正则表示的特征标为

$$
\chi^{\mathrm{reg}}(g)=\begin{cases} n & (g=g_0), \\ 0 & (g\neq g_0). \end{cases} \tag{2.132}
$$

2.6.2 正则表示的约化

正则表示可按不可约表示约化为

$$D^{\text{reg}}(g)=\sum_i{}^{\oplus}a_iD^{(i)}(g)\quad(g\in G),$$

其中 a_i 为 $D^{(i)}(g)$ 在正则表示中出现的次数. 上式两边求迹得

$$\chi^{\text{reg}}(g)=\sum_i a_i\chi^{(i)}(g).\tag{2.133}$$

由 (2.125) 式知

$$a_i=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi^{\text{reg}}(g)\,\chi^{(i)*}(g),\tag{2.134}$$

由 (2.132) 式知, 上式的求和只有当 $g=g_0$ 时才不为零, 故

$$\begin{aligned}a_i&=\frac{1}{n}\chi^{\text{reg}}(g_0)\,\chi^{(i)*}(g_0)=\frac{1}{n}n\chi^{(i)*}(g_0)\\&=\chi^{(i)*}(g_0)=l_i,\end{aligned}\tag{2.135}$$

其中的 l_i 为不可约表示 $D^{(i)}(G)$ 的维数. 可见, 在正则表示中不可约表示出现的次数等于该不可约表示的维数. 这样, 正则表示可约化为

$$D^{\text{reg}}(g)=\sum_i{}^{\oplus}l_iD^{(i)}(g)\quad(g\in G),\tag{2.136}$$

只要有不可约表示存在, l_i 肯定不为零, 所以每个不可约表示都会出现在上式的直和中. 由 (2.136) 式知, 前面给出的 D_3 群的正则表示 $D^{\text{reg}}(D_3)$ 是不可约的.

2.6.3 正则表示的应用

下面利用正则表示证明不可约表示的一些性质.

定理 2.6——不可约表示的维数定理 各不可约表示维数的平方和等于群的阶.

在 2.4 节中曾证得 (2.95) 式

$$\sum_i l_i^2\leqslant n,$$

其中 l_i 为第 i 个不可约表示 $D^{(i)}(G)$ 的维数, n 为群 G 的阶. 下面证明上式中的 “$<$” 实际上是不成立的, 即

$$\sum_i l_i^2=n.\tag{2.137}$$

证明　将 (2.135) 代入 (2.133) 式得

$$\chi^{\mathrm{reg}}(g) = \sum_i l_i \chi^{(i)}(g) \xlongequal{(2.132)\text{式}} \begin{cases} n & (g = g_0), \\ 0 & (g \neq g_0). \end{cases} \tag{2.138}$$

在上式中取 $g = g_0 \in G$, 得

$$\sum_i l_i^2 = n,$$

(2.137) 式得证.

定理 2.7　不等价不可约表示的数目等于类的数目.

在 2.5.3 节中曾证得 (2.109) 式

$$r \leqslant c,$$

其中, r 是群 G 的不等价不可约表示的数目, c 是群 G 可分解的类的数目. 下面将证明

$$r = c. \tag{2.139}$$

证明　如果群中的两个元素互为共轭, 则其逆元素也互为共轭. 因为若假设 G 中的两元素 g_k 与 g_m 互为共轭元素, 则对于任意的 $g \in G$ 有

$$g^{-1} g_k g = g_m.$$

两边取逆得

$$g^{-1} g_k^{-1} g = g_m^{-1},$$

故 g_k 与 g_m 的逆也互为共轭元素. 这样, 如果在群 G 中有类的和 $c^{(i)}$, 也必有类的和 $c^{(i')}$, $c^{(i')}$ 中的元素是 $c^{(i)}$ 中元素的逆元素, 且二者所包含的元素的数目相等, 这样乘积 $c^{(i)} c^{(i')}$ 中必包含类的和 $c^{(0)} = g_0$. 另由 (1.66) 式知

$$c^{(i)} c^{(j)} = \sum_k a_{ijk} c^{(k)},$$

展开系数显然满足条件

$$a_{ij0} = \begin{cases} 0 & (j \neq i'), \\ n_i & (j = i'), \end{cases} \tag{2.140}$$

其中的 n_i 是 $C^{(i)}$ 类中元素的个数. 再由 (2.122) 式知

$$n_i n_j \chi^{(m)}(g_{C^{(i)}}) \chi^{(m)}(g_{C^{(j)}}) = l_m \sum_k a_{ijk} n_k \chi^{(m)}(g_{C^{(k)}}).$$

两边对不可约表示指标 m 求和得

$$
\begin{aligned}
n_i n_j \sum_m \chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right)\chi^{(m)}\left(g_{C^{(j)}}\right) &= \sum_k a_{ijk} n_k \sum_m l_m \chi^{(m)}\left(g_{C^{(k)}}\right) \\
&\xlongequal{(2.138)\text{式与}g_{C(0)}=g_0} \sum_k a_{ijk} n_k n \delta_{k0} \\
&= a_{ij0} n_0 n \xlongequal{n_0=1} a_{ij0} n \\
&\xlongequal{(2.140)\text{式}} \begin{cases} 0 & (j \neq i'), \\ n_i n & (j = i'). \end{cases}
\end{aligned}
$$

这样

$$
\sum_m \chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right)\chi^{(m)}\left(g_{C^{(j)}}\right) = \frac{n}{n_j}\delta_{ji'}. \tag{2.141}
$$

又

$$
D_{pq}^{(m)}\left(g_{C^{(i')}}\right) = D_{pq}^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}^{-1}\right) = D_{pq}^{(m)-1}\left(g_{C^{(i)}}\right) = D_{pq}^{(m)\dagger}\left(g_{C^{(i)}}\right) = D_{qp}^{(m)*}\left(g_{C^{(i)}}\right),
$$

故

$$
\chi^{(m)}\left(g_{C^{(i')}}\right) = \chi^{(m)*}\left(g_{C^{(i)}}\right), \quad \Rightarrow \chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right) = \chi^{(m)*}\left(g_{C^{(i')}}\right),
$$

这样, (2.141) 式变为

$$
\sum_m \chi^{(m)}\left(g_{C^{(j)}}\right)\chi^{(m)*}\left(g_{C^{(i)}}\right) = \frac{n}{n_j}\delta_{ji}. \tag{2.142}
$$

记

$$
A^{(m)}\left(C^{(i)}\right) = \sqrt{\frac{n_i}{n}}\chi^{(m)}\left(g_{C^{(i)}}\right),
$$

(2.142) 式变为

$$
\sum_m A^{(m)}\left(C^{(j)}\right)A^{(m)*}\left(C^{(i)}\right) = \delta_{ji}. \tag{2.143}
$$

上式在形式上与 (2.107) 式相同, 只是等号左边的求和变量不同, (2.107) 式是对类指标求和, 上式是对表示指标求和, 这一差异使得由上式解读出来的意思与 (2.107) 式的有所不同. (2.143) 式给出的是矢量集合

$$
\left\{A^{(m)}\left(C^{(i)}\right), i = 1, 2, \cdots, c-1\right\} \tag{2.144}
$$

的正交归一关系, 该矢量由类指标 i 标记. 按假设群 G 可分解为 c 个类, 所以正交归一的矢量共有 c 个. 每一矢量有 r 个分量, 如 $A^{(0)}\left(C^{(i)}\right)$, $A^{(1)}\left(C^{(i)}\right)$, $\cdots$,

$A^{(r-1)}\left(C^{(i)}\right)$, 所以 (2.144) 式是 r 维空间的一组正交归一矢量. 由于 r 维空间中正交归一的矢量不能超过 r 个, 所以

$$c \leqslant r, \tag{2.145}$$

为了不与 (2.109) 式的 $r \leqslant c$ 相矛盾, 得结果

$$r = c,$$

(2.139) 式得证.

2.7　群表示的直积与直积群的表示

2.7.1　群表示的直积

设群 G 有两个表示 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$, 作这两个表示矩阵的直积

$$D(g) = D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g) \quad (g \in G), \tag{2.146}$$

可以证明, 这个表示也是群 G 的一个表示.

证明　设 $g_i, g_j \in G$, 则

$$\begin{aligned} D(g_i) D(g_j) &= \left[D^{(1)}(g_i) \otimes D^{(2)}(g_i)\right] \left[D^{(1)}(g_j) \otimes D^{(2)}(g_j)\right] \\ &\xlongequal{(2.55)\text{式}} \left[D^{(1)}(g_i) D^{(1)}(g_j)\right] \otimes \left[D^{(2)}(g_i) D^{(2)}(g_j)\right] \\ &= D^{(1)}(g_i g_j) \otimes D^{(2)}(g_i g_j) = D(g_i g_j), \end{aligned}$$

保持群的乘法规则不变, 因此群 G 的两个表示的直积也是群 G 的一个表示.

再由 (2.54) 式知, 两表示直积的特征标为

$$\chi(g) = \chi^{(1)}(g) \chi^{(2)}(g), \tag{2.147}$$

即两表示直积的特征标等于两直积因子特征标之积.

如果表示 $D^{(1)}(G)$ 与 $D^{(2)}(G)$ 是不可约的, 则它们的直积一般来说是可约的. 因为, 若假设 G 的阶数为 n, 则由 (2.105) 式知

$$\sum_{g \in G} \chi^{(1)}(g) \chi^{(1)*}(g) = \sum_{g \in G} \chi^{(2)}(g) \chi^{(2)*}(g) = n, \tag{2.148}$$

而

$$\sum_{g \in G} \chi(g) \chi^{*}(g) = \sum_{g \in G} \chi^{(1)}(g) \chi^{(2)}(g) \chi^{(2)*}(g) \chi^{(1)*}(g) \neq n, \tag{2.149}$$

不满足不可约表示的特征标需满足的条件 (2.148) 式. 因此, 一般来说, 群 G 的两个不可约表示的直积是可约的, 它们可按不可约表示约化为

$$D^{(i)}(g)\otimes D^{(j)}(g)=\sum_k{}^{\oplus}a_{ijk}D^{(k)}(g)\quad(g\in G), \tag{2.150}$$

这一分解称为克莱布施–戈登 (Clebsch-Gordan) 展开式.

2.7.2 直积群的表示

设 G_1 与 G_2 为两个有限群, 阶数分别为 n_1 与 n_2, 两者中的元素相互对易, 则由 1.6 节的讨论知, 它们的直积

$$G(g)=G_1(g_1)\otimes G_2(g_2) \tag{2.151}$$

亦构成群, 称为直积群, 其阶数为 n_1n_2, 元素为 $g=g_1g_2$, 其中 $g_1\in G_1$, $g_2\in G_2$.

设 G_1 与 G_2 群的不可约表示分别为 $D^{(1)}(G_1)$ 与 $D^{(2)}(G_2)$, 则可证明

$$D(g)=D^{(1)}(g_1)\otimes D^{(2)}(g_2)\quad(g=g_1g_2\in G,g_1\in G_1,g_2\in G_2), \tag{2.152}$$

是 (2.151) 式的表示, 且是不可约的.

证明 由于 $D^{(1)}(G_1)$ 是群 G_1 的不可约表示, 若设

$$g_{1i},g_{1j}\in G_1,\quad g_{1i}g_{1j}=g_{1k}\in G_1, \tag{2.153}$$

则有

$$D^{(1)}(g_{1i})D^{(1)}(g_{1j})=D^{(1)}(g_{1k}), \tag{2.154}$$

同样, 若

$$g_{2i},g_{2j}\in G_2,\quad g_{2i}g_{2j}=g_{2k}\in G_2, \tag{2.155}$$

则有

$$D^{(2)}(g_{2i})D^{(2)}(g_{2j})=D^{(2)}(g_{2k}), \tag{2.156}$$

作直积

$$\begin{aligned}D^{(1)}(g_{1k})\otimes D^{(2)}(g_{2k})&=\left[D^{(1)}(g_{1i})D^{(1)}(g_{1j})\right]\otimes\left[D^{(2)}(g_{2i})D^{(2)}(g_{2j})\right]\\&\xlongequal{(2.55)\text{式}}\left[D^{(1)}(g_{1i})\otimes D^{(2)}(g_{2i})\right]\left[D^{(1)}(g_{1j})\otimes D^{(2)}(g_{2j})\right],\end{aligned} \tag{2.157}$$

利用 (2.152) 式, (2.157) 式变为

$$D(g_k)=D(g_i)D(g_j), \tag{2.158}$$

其中

$$g_k = g_{1k}g_{2k} \xlongequal{(2.153)与(2.155)式} g_{1i}g_{1j}g_{2i}g_{2j} = g_{1i}g_{2i}g_{1j}g_{2j} = g_ig_j,$$

保持乘法规则不变, 所以 (2.152) 是 (2.151) 式直积群的表示.

对 (2.152) 式两边求迹, 并利用 (2.54) 式得

$$\chi(g) = \chi^{(1)}(g_1)\,\chi^{(2)}(g_2),$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}\chi(g)\,\chi^*(g) &= \sum_{g_1\in G_1}\sum_{g_2\in G_2}\chi^{(1)}(g_1)\,\chi^{(2)}(g_2)\,\chi^{(2)*}(g_2)\,\chi^{(1)*}(g_1)\\ &= \sum_{g_1\in G_1}\chi^{(1)}(g_1)\,\chi^{(1)*}(g_1)\sum_{g_2\in G_2}\chi^{(2)}(g_2)\,\chi^{(2)*}(g_2)\\ &= n_1n_2 = \text{直积群的阶},\end{aligned}$$

表明 (2.152) 是直积群 (2.151) 式的不可约表示.

第 3 章　置换群及其表示

置换群 S_n 又称对称群, 是由 n 个数的置换构成的有限群, 共有 $n!$ 个元素. 由 1.5.1 节介绍过的凯莱定理知, 任一 n 阶有限群都同构于 S_n 的一个子群. 所以置换群在群论中占有重要的地位, 是除线性或矩阵群外, 研究有限群的另一重要渠道. 本章将着眼于实际的应用, 介绍置换群的基本知识、重要结论及典型应用, 包括置换群的类、配分、杨图与杨表, 置换群的不可约表示及其特征标等.

3.1　置换群的类

3.1.1　置换的循环与对换分解

在 1.1.9 节曾介绍过置换的概念, 如那里所述, 置换是一种代数运算, n 个数字的任意置换用 (1.12) 式表示为

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

其中 p_i 是 $1\sim n$ 中的某一数字.

(3.1) 式的置换可以写成一个更加简单的形式, 即写成若干个没有公共数字的独立循环之积, 如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 4\ )(\ 2 \quad 3 \quad 6\ )(5), \tag{3.2}$$

其中 (5) 称为单循环, 它代表 5 变为 5, 即 5 不变. $(\ 1 \quad 4\ )$ 为二循环又称对换, 它代表 1 变为 4, 4 又变回 1. $(\ 2 \quad 3 \quad 6\ )$ 为三循环, 代表 2 变为 3, 3 变为 6, 6 变为 2. 再如, 例 1.4 给出的 3 元置换群 S_3, 各元素的循环分解为

$$p_e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)\,(2)\,(3)\,; \tag{3.3a}$$

$$\begin{cases} p_a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 2\ )\,(3)\,, \\ p_b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 3\ )\,(2)\,, \\ p_c=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (\ 2 \quad 3\ )(1); \end{cases} \tag{3.3b}$$

$$p_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 3 \quad 2\ ), \quad p_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 2 \quad 3\ ). \tag{3.3c}$$

一般地, 用记号 $(\ p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_k\ )$ 代表一个 k 循环, 称 k 为循环的长度. 显然, 没有公共数字的两独立循环之间是相互对易的, 如

$$\begin{aligned}(\ 1 \quad 4\ )(\ 2 \quad 3 \quad 6\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\ 2 \quad 3 \quad 6\ )(\ 1 \quad 4\ ). \end{aligned} \tag{3.4}$$

而同一循环中的数字可作轮换而不改变循环的结果, 如

$$(\ 2 \quad 3 \quad 6\ ) = (\ 3 \quad 6 \quad 2\ ) = (\ 6 \quad 2 \quad 3\ ). \tag{3.5}$$

单循环通常省去不写, 如 (3.2) 与 (3.3b) 式可简写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 4\ )(\ 2 \quad 3 \quad 6\ ),$$

$$p_a = (\ 1 \quad 2\ ), \quad p_b = (\ 1 \quad 3\ ), \quad p_c = (\ 2 \quad 3\ ).$$

任一循环可分解为若干个含有公共数字的对换之积. 例如, 因为

$$(\ 1 \quad 2\ )(\ 2 \quad 3\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 2 \quad 3\ ), \tag{3.6}$$

$$(\ 1 \quad 3\ )(\ 1 \quad 2\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 2 \quad 3\ ), \tag{3.7}$$

所以

$$(\ 1 \quad 2 \quad 3\ ) = (\ 1 \quad 2\ )(\ 2 \quad 3\ ) = (\ 1 \quad 3\ )(\ 1 \quad 2\ ). \tag{3.8}$$

一般情况下可证明

$$\begin{aligned}(\ p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_k\ ) &= (\ p_1 \quad p_2\ )(\ p_2 \quad p_3\ ) \cdots (\ p_{k-1} \quad p_k\ ) \\ &= (\ p_1 \quad p_k\ )(\ p_1 \quad p_{k-1}\ ) \cdots (\ p_1 \quad p_2\ ). \end{aligned} \tag{3.9}$$

当两个对换含有相同数字时, 这两个对换是不可对易的. 如

$$\begin{aligned}(\ 1 \quad 2\ )(\ 1 \quad 3\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\ 1 \quad 3 \quad 2\ ) \neq (\ 1 \quad 3\ )(\ 1 \quad 2\ ) \xlongequal{(3.7)\text{ 式}} (\ 1 \quad 2 \quad 3\ ). \end{aligned}$$

由此可见, 一个置换可分解为若干个没有相同数字的独立循环之积, 而一个循环又可分解为若干个含有相同数字的对换之积. 因此, 一个置换可分解为若干个含有相同数字的对换之积. 由于一个循环分解为对换乘积的形式不是唯一的, 如 (3.9) 式所示, 所以一个置换可分解为对换之积的形式不是唯一的. 一个置换若能分解为奇数个对换之积, 则称为奇置换; 反之, 一个置换若能分解为偶数个对换之积, 则称为偶置换. 一个置换可分解为对换乘积的形式虽然不是唯一的, 但其奇偶性却是唯一的. 因为任一置换可分解为形式一定的循环乘积, 而每一循环长度 k 的奇偶性一定, 若 k 为偶数, 则该循环可分解为奇数个对换之积; 反之, 若 k 为奇数, 则该循环可分解为偶数个对换之积. 由 (3.9) 式知, 这一结论显然是成立的. 比如

$$(\,1\quad 2\quad 3\quad 4\,)=(\,1\quad 4\,)(\,1\quad 3\,)(\,1\quad 2\,)=(\,1\quad 2\,)(\,2\quad 3\,)(\,3\quad 4\,),$$

$$(\,1\quad 2\quad 3\,)=(\,1\quad 3\,)(\,1\quad 2\,)=(\,1\quad 2\,)(\,2\quad 3\,).$$

任一置换 p 和它的逆 p^{-1} 的区别仅是上、下两行数字的对换, 数字间的对应关系保持不变, 所以二者间应具有相同的奇偶性. 如

$$p=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(\,1\quad 2\quad 3\,),\quad p^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}=(\,1\quad 3\quad 2\,).$$

显然两个偶 (奇) 置换之积为偶置换, 一个奇置换与一个偶置换之积为奇置换.

记所有偶置换的全体为 A_n, 则 A_n 的数目正好等于 $n!/2$. 并且由于偶 $\times$ 偶 $=$ 偶满足封闭性; 单位元 $p_e\in A_n$ 存在 (恒等置换, 零个对换); 另偶 $^{-1}=$ 偶 $\in A_n$, 故 A_n 构成 S_n 的一个子群且是一个正规子群. 因为对于任意的 $p_A\in A_n$, $p_S\in S_n$, 有

$$p_S p_A p_S^{-1}\in A_n. \tag{3.10}$$

商群 S_n/A_n 是二阶群, 它有两个一维表示 $Z_1=\{1\}$ 与 $Z_2=\{1\ \ -1\}$, 而任一商群的表示也一定是其大群的表示, 所以群 S_n 一定有两个不等价的一维表示, 一个是 $Z_1=\{1\}$, 此时 S_n 中的所有置换都映射到单位元 1; 另一个是 $Z_2=\{1\ \ -1\}$, 该情况下, S_n 中所有的偶置换都映射到 1, 所有的奇置换都映射到 -1.

3.1.2 S_n 群的类与配分

1. S_n 群的类与循环结构

设有两个置换 σ 与 τ, 二者都是 S_n 的元素, 其中

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\\sigma_1&\sigma_2&\cdots&\sigma_n\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\\tau_1&\tau_2&\cdots&\tau_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1&\sigma_2&\cdots&\sigma_n\\\tau_{\sigma_1}&\tau_{\sigma_2}&\cdots&\tau_{\sigma_n}\end{pmatrix},$$

则 σ 的共轭元素为

$$\tau\sigma\tau^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n\\ \tau_{\sigma_1} & \tau_{\sigma_2} & \cdots & \tau_{\sigma_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n\\ \tau_{\sigma_1} & \tau_{\sigma_2} & \cdots & \tau_{\sigma_n}\end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

由此得置换 σ 的共轭置换 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 的求法 1：对置换 σ 的上、下两行数字同时作 τ 置换. 如

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix},$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix},$$

两者都是 6 元置换群 S_6 的元素. 对 σ 的上、下两行数字同时作 τ 置换得

$$\tau\sigma\tau^{-1}=\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6\\ \tau_{\sigma_1} & \tau_{\sigma_2} & \tau_{\sigma_3} & \tau_{\sigma_4} & \tau_{\sigma_5} & \tau_{\sigma_6}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$$
$$=(\ 1\quad 4\quad 5\ )(\ 2\quad 3\ )(6)\in S_6. \tag{3.12}$$

若将置换分解为独立循环之积的形式, 则可得置换 σ 的共轭置换 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 的求法 2：分别写出 σ 与 τ 的独立循环之积, 然后对 σ 各循环中的数字分别作 τ 置换. 例如, 在上例中

$$\begin{aligned}\sigma&=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}=(\ 6\quad 2\quad 3\ )(\ 1\quad 4\ )(5)\,,\\ \tau&=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix}=(\ 1\quad 2\quad 4\quad 3\quad 5\quad 6\ ),\end{aligned} \tag{3.13}$$

对 σ 每个循环中的数字分别施行 τ 置换得

$$\tau\sigma\tau^{-1}=(\ 1\quad 4\quad 5\ )(\ 2\quad 3\ )(6)\,, \tag{3.14}$$

与 (3.12) 式相一致.

由共轭置换的求法 2 可以看出, 共轭变换不改变置换的循环结构, 所以置换 σ 与它的共轭置换 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 有着相同的循环结构 [参见 (3.13) 与 (3.14) 两式]; 反之, 任

意两个循环结构相同的置换一定是相互共轭的, 而相互共轭的元素组成一个类. 所以一个给定类中的所有元素具有相同的循环结构, 这样 S_n 群中类的数目与其所有可能的不同循环结构的数目相等. 例如, 由 (1.91) 式知, S_3 群有三个类

$$C^{(0)} = \{p_e\}, \quad C^{(1)} = \{p_d, p_f\}, \quad C^{(2)} = \{p_a, p_b, p_c\},$$

由 (3.3) 式知, 各类中元素的循环结构相同.

2. 配分

为了描述 S_n 的循环结构, 人们引入了配分的概念：按循环长度递减的次序排列独立循环之积. 由于 n 元置换的循环总长度等于 n, 所以 n 可分解为一些不增加的整数之和, 即

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_i \quad (n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_i), \tag{3.15}$$

或简记为

$$[n_1, n_2, \cdots, n_i], \tag{3.16}$$

称为 n 的一个配分. 每个置换都对应于 n 的一个配分, 如 (3.13) 式中的置换 σ 与 τ, 其配分分别为

$$\sigma : [3, 2, 1]; \quad \tau : [6]. \tag{3.17}$$

由于相互共轭的元素具有相同的循环结构, 所以互为共轭元素的配分相同. 这样 S_n 的一个类中的所有元素对应于 n 的同一个配分, 置换群 S_n 可分解的类的数目等于 n 的所有可能的配分数.

例 3.1 S_2 群有两个类.

配分 $[1,1] = [1^2]$, 一个元素：$(1)(2) = p_e$.

配分 $[2]$, 一个元素：$(\ 1\quad 2\ )$.

与所有二阶群一样, S_2 有两个一维表示, 一个平庸, 一个非平庸.

例 3.2 S_3 群有三个类.

配分 $[1,1,1] = [1^3]$, 一个元素：$(1)(2)(3) = p_e$.

配分 $[2,1]$, 三个元素：$(\ 1\quad 2\ ) = p_a$, $(\ 1\quad 3\ ) = p_b$, $(\ 2\quad 3\ ) = p_c$.

配分 $[3]$, 两个元素：$(\ 1\quad 3\quad 2\ ) = p_d$, $(\ 1\quad 2\quad 3\ ) = p_f$.

由于 S_3 与 D_3 群同构, 所以与 D_3 群一样, S_3 群也有两个一维与一个二维不可约表示.

例 3.3 S_4 群有五个类.

配分 $[1,1,1,1]=\left[1^4\right]$, 一个元素：$(1)(2)(3)(4)=p_e$.

配分 $[2,1,1]=\left[2,1^2\right]$, 六个元素：$(\ 1\ \ 2\ ),(\ 1\ \ 3\ ),(\ 1\ \ 4\ ),(\ 2\ \ 3\ ),(2\ \ 4),(\ 3\ \ 4\ )$.

配分 $[2,2]=\left[2^2\right]$, 三个元素：$(\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 3\ )(\ 2\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 4\ )(\ 2\ \ 3\ )$.

配分 $[3,1]$, 八个元素：$(\ 1\ \ 2\ \ 3\ ),(\ 1\ \ 3\ \ 2\ ),(\ 1\ \ 2\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 4\ \ 2\ ),(\ 1\ \ 3\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 4\ \ 3\ ),(\ 2\ \ 3\ \ 4\ ),(\ 2\ \ 4\ \ 3\ )$.

配分 $[4]$, 六个元素：$(\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 2\ \ 4\ \ 3\ ),(\ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ ),(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2),(\ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ ),(\ 1\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ )$.

S_4 群有正规子群

$$H=\Big\{p_e,(\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 3\ )(\ 2\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 4\ )(\ 2\ \ 3\ )\Big\}, \tag{3.18}$$

因为由共轭置换的求法 2 不难证明

$$\sigma H\sigma^{-1}=H \quad (\sigma\in S_4), \tag{3.19}$$

如, 若取

$$\sigma=(\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ ),$$
$$\sigma H\sigma^{-1}=\Big\{p_e,(\ 2\ \ 3\ )(\ 4\ \ 1\ ),(\ 2\ \ 4\ )(\ 3\ \ 1\ ),(\ 2\ \ 1\ )(\ 3\ \ 4\ )\Big\}=H,$$

另如, 若取

$$\sigma=(\ 2\ \ 4\ \ 3\ ),$$
$$\sigma H\sigma^{-1}=\Big\{p_e,(\ 1\ \ 4\ )(\ 2\ \ 3\ ),(\ 1\ \ 2\ )(\ 4\ \ 3\ ),(\ 1\ \ 3\ )(\ 4\ \ 2\ )\Big\}=H,$$

再如, 若取

$$\sigma=(\ 1\ \ 4\ ),$$
$$\sigma H\sigma^{-1}=\Big\{p_e,(\ 4\ \ 2\ )(\ 3\ \ 1\ ),(\ 4\ \ 3\ )(\ 2\ \ 1\ ),(\ 4\ \ 1\ )(\ 2\ \ 3\ )\Big\}=H.$$

用同样的方法可做其他证明, 有兴趣的读者可自证之.

由此可得商群

$$S_4/H=\{H,K_1,K_2,K_3,K_4,K_5\}, \tag{3.20}$$

其中

$$K_1=(\ 1\ \ 2\ )H=\Big\{(\ 1\ \ 2\ ),(\ 3\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ ),(\ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ )\Big\}, \tag{3.21a}$$

$$K_2 = (\ 1 \quad 3\ )H = \Big\{(\ 1 \quad 3\ ), (\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\ ), (\ 2 \quad 4\ ), (\ 1 \quad 4 \quad 3 \quad 2\ )\Big\}, \tag{3.21b}$$

$$K_3 = (\ 2 \quad 3\ )H = \Big\{(\ 2 \quad 3\ ), (\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2\ ), (\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 3\ ), (\ 1 \quad 4\ )\Big\}, \tag{3.21c}$$

$$K_4 = (\ 1 \quad 2 \quad 3\ )H = \Big\{(\ 1 \quad 2 \quad 3\ ), (\ 1 \quad 3 \quad 4\ ), (\ 2 \quad 4 \quad 3\ ), (\ 1 \quad 4 \quad 2\ )\Big\}, \tag{3.21d}$$

$$K_5 = (\ 1 \quad 3 \quad 2\ )H = \Big\{(\ 1 \quad 3 \quad 2\ ), (\ 2 \quad 3 \quad 4\ ), (\ 1 \quad 2 \quad 4\ ), (\ 1 \quad 4 \quad 3\ )\Big\}. \tag{3.21e}$$

如,

$$\begin{aligned} K_1 &= (\ 1 \quad 2\ )H \\ &= (\ 1 \quad 2\ )\Big\{p_e, (\ 1 \quad 2\ )(\ 3 \quad 4\ ), (\ 1 \quad 3\ )(\ 2 \quad 4\ ), (\ 1 \quad 4\ )(\ 2 \quad 3\ )\Big\}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中

$$(\ 1 \quad 2\ )p_e = (\ 1 \quad 2\ )(1)(2)(3)(4) = (\ 1 \quad 2\ ),$$

$$\begin{aligned} (\ 1 \quad 2\ )(\ 1 \quad 2\ )(\ 3 \quad 4\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (\ 3 \quad 4\ ), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ 1 \quad 2\ )(\ 1 \quad 3\ )(\ 2 \quad 4\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4\ ), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ 1 \quad 2\ )(\ 1 \quad 4\ )(\ 2 \quad 3\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 4 \quad 2 \quad 3\ ). \end{aligned}$$

将以上四式代入 (3.22) 式即得 (3.21a) 式. 再如

$$\begin{aligned} K_5 =&(\ 1 \quad 3 \quad 2\ )H \\ =&(\ 1 \quad 3 \quad 2\ )\Big\{p_e, (\ 1 \quad 2\ )(\ 3 \quad 4\ ), (\ 1 \quad 3\ )(\ 2 \quad 4\ ), (\ 1 \quad 4\ )(\ 2 \quad 3\ )\Big\}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

其中

$$(\ 1\ \ 3\ \ 2\ )p_e = (\ 1\ \ 3\ \ 2\ ),$$

$$\begin{aligned}(\ 1\ \ 3\ \ 2\ )(\ 1\ \ 2\ )(\ 3\ \ 4\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (\ 2\ \ 3\ \ 4\ ), \\ (\ 1\ \ 3\ \ 2\ )(\ 1\ \ 3\ )(\ 2\ \ 4\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (\ 1\ \ 2\ \ 4\ ), \\ (\ 1\ \ 3\ \ 2\ )(\ 1\ \ 4\ )(\ 2\ \ 3\ ) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\ 1\ \ 4\ \ 3\ ).\end{aligned}$$

将以上四式代入 (3.23) 式即得 (3.21e) 式. 同法可证明 (3.21) 其他各式, 有兴趣的读者可自证之.

商群 S_4/H 与 S_3 群都是六阶群, 二者同构. 而商群的表示也是其大群的表示, 所以 S_3 群的三个不可约表示也是 S_4 群的不可约表示. 由于 S_4 有五个类, 由 (2.139) 式知, 它共有五个不等价不可约表示. 再者, S_4 群的阶数为 $4! = 24$, 则由 (2.137) 式知

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + l_4^2 + l_5^2 = 24, \quad \Rightarrow l_4^2 + l_5^2 = 18, \quad \Rightarrow l_4 = l_5 = 3. \tag{3.24}$$

可见, 在 S_4 的五个不可约表示中, 两个一维, 一个二维, 两个三维.

3.2 杨图与杨表

由前面的讨论知, S_n 群可分解的类的数目等于 n 的所有可能配分数, n 的各种配分可直观地用图形表示出来, 这种图示法首先由英国数学家 Alfred Young 于 1900 年引入的, 所以所用图形称为杨图 (Young diagram).

3.2.1 杨图

设 n 的某种配分为

$$[\nu] = [\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k], \quad \nu_i \geqslant \nu_{i+1}, \quad \sum_i \nu_i = n, \tag{3.25}$$

在杨图中, 该配分由 n 个格子组成, 其中第 1 行为 ν_1 个格子, 第 2 行为 ν_2 个等, 如图 3.1 所示. 上一行的格子数大于等于下一行的格子数, 左侧一列的格子数大于等于右侧一列的格子数, 合起来的格子总数为 n 个, 所组成的图形称为 n 元杨图. 显然, 杨图数 = 配分数 = 类数 = 不等价不可约表示数.

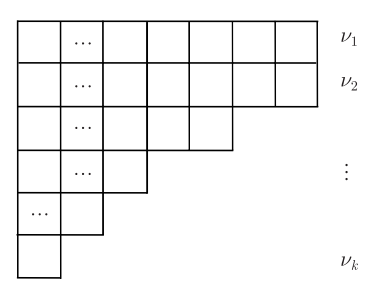


图 3.1　S_n 群的一个杨图

例 3.4　S_2 群的杨图由两个格子组成, 各配分的杨图如图 3.2 所示.

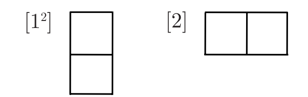


图 3.2　S_2 群的杨图

例 3.5　S_3 群的杨图由三个格子组成, 各配分的杨图如图 3.3 所示.

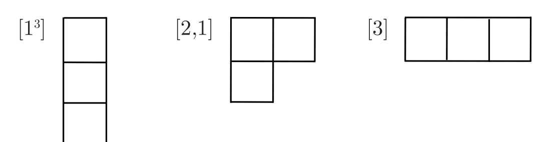


图 3.3　S_3 群的杨图

例 3.6　S_4 群的杨图由四个格子组成, 各配分的杨图如图 3.4 所示.

假设在 n 的配分 $[\nu]=[\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k]$ 中, 1 循环有 a_1 个, 2 循环有 a_2 个, k 循环有 a_k 个等, 则

$$a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n. \tag{3.26}$$

对于 S_n 中一个确定的类, n 的配分 $[\nu]$ 一定, 数组 $(a)=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 也一定, 所以可以用数组 (a) 来标记 S_n 的类. 这种标记方法的好处是可由数组 (a) 方便地求出各类中所包含的元素的数目, 结果是

$$n_{(a)}=\frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!1^{a_1}2^{a_2}\cdots k^{a_k}}. \tag{3.27}$$

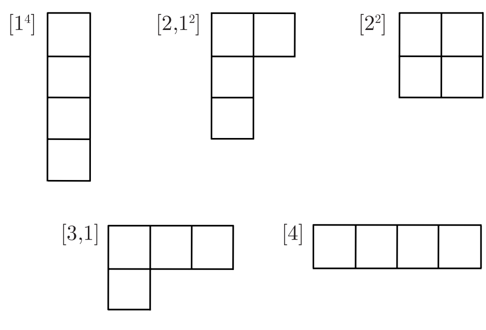


图 3.4　S_4 群的杨图

证明　设 S_n 中某置换 p 的循环结构为

$$p=\underbrace{(\cdot)(\cdot)\cdots(\cdot)}_{1\text{循环}a_1\text{个}}\underbrace{(\cdot\ \ \cdot)(\cdot\ \ \cdot)\cdots(\cdot\ \ \cdot)}_{2\text{循环}a_2\text{个}}\underbrace{(\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot)(\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot)\cdots(\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot)}_{3\text{循环}a_3\text{个}}\cdots, \tag{3.28}$$

其中的圆点 "·" 代表 1∼ n 中的一个数字, 圆点的总数为 n 个.

将 n 个不同的数字放入上述括号中的圆点处, 若没有任何限制条件, 则总共有 $n!$ 种放法. 但 $n!$ 中有许多是属于相同的置换. 一种是各独立循环次序的交换不给出新置换, 因此 a_k 个 k 循环中有 $a_k!$ 种置换是属于同一种置换, $n!$ 中应除去 $a_1!a_2!\cdots a_k!$. 再一种就是各循环中数字的轮换不给出新置换, 所以一个 k 循环要重复置换 k 次, a_k 个 k 循环要重复置换 k^{a_k} 次, $n!$ 中还应除去 $1^{a_1}2^{a_2}\cdots k^{a_k}$, 因此得 (3.27) 式.

例 3.7　对于群 S_4, 在类 $[1^4]$ 中, $a_1=4, a_2=0, a_3=0, a_4=0$, 则

$$(a)=(4,0,0,0),$$

故按 (3.27) 式, 类 $[1^4]$ 包含的元素数为

$$n_{(4,0,0,0)}=\frac{4!}{4!1^4}=1.$$

在类 $[2,1^2]$ 中, $a_1=2, a_2=1, a_3=0, a_4=0$, 则

$$(a)=(2,1,0,0),$$

$$n_{(2,1,0,0)}=\frac{4!}{2!1!1^2 2^1}=6.$$

在类 $[2^2]$ 中, $a_1=0, a_2=2, a_3=0, a_4=0$, 则

$$(a)=(0,2,0,0),$$

$$n_{(0,2,0,0)} = \frac{4!}{2!2^2} = 3.$$

在类 $[3,1]$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0$, 则

$$(a) = (1,0,1,0),$$

$$n_{(1,0,1,0)} = \frac{4!}{1!1!1^1 3^1} = 8.$$

在类 $[4]$ 中, $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1$, 则

$$(a) = (0,0,0,1),$$

$$n_{(0,0,0,1)} = \frac{4!}{1!4^1} = 6.$$

这些结果与例 3.3 所得结果相一致.

3.2.2 杨表

置换群 S_n 的不等价不可约表示数与杨图数联系了起来 (两者相等), 再引入杨表 (Young tableau), 就可以确定各不可约表示的维数.

在 S_n 的杨图 $[\nu]$ 上, 将 n 个数字无重复地填到 n 个格子中, 并且每一行自左而右是按增加顺序排列的, 每一列由上往下数字也是增加的, 由此得到的填了数字的杨图称为杨表.

定理 3.1 S_n 群不可约表示 $D^{[\nu]}$ 的维数 $d^{[\nu]}$ 等于杨图 $[\nu]$ 可填充的杨表数.

这样, 根据 n 的配分 $[\nu]$ 可画出其杨图, 再将 n 个数字按上述规则填充到杨图上, 得到所有可能的杨表, 由杨表数就可得到与配分 $[\nu]$ 相应的不可约表示的维数.

例 3.8 $n = 1$、2、3、4 时 S_n 群的杨表如图 3.5 所示.

按照定理 3.1, 可得 S_n 在 $n = 1$、2、3、4 时各不可约表示的维数.

(1) S_1 群.

杨图 $[1]$, 杨表 1 个, $d^{[1]} = 1$.

这是显然的, 1 元置换群 S_1 只有单位元一个元素, 其表示是一维平庸的.

(2) S_2 群.

杨图 $[1^2]$, 杨表 1 个, $d^{[1^2]} = 1$; 杨图 $[2]$, 杨表 1 个, $d^{[2]} = 1$. 如例 3.1 所述, S_2 群有两个一维表示.

(3) S_3 群.

杨图 $[1^3]$, 杨表 1 个, $d^{[1^3]} = 1$; 杨图 $[2,1]$, 杨表 2 个, $d^{[2,1]} = 2$; 杨图 $[3]$, 杨表 1 个, $d^{[3]} = 1$. 与例 3.2 一样, S_3 群有两个一维表示, 一个二维表示.

(4) S_4 群.

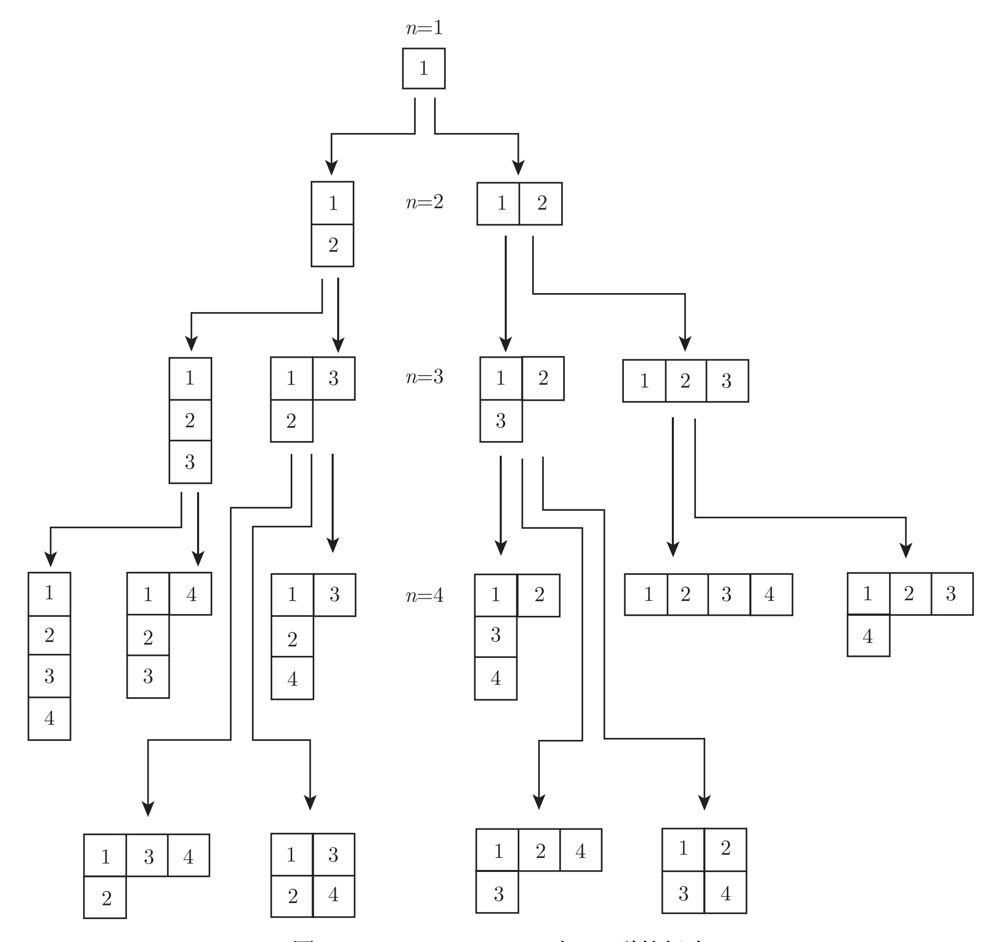


图 3.5 $n=1$、2、3、4 时 S_n 群的杨表

杨图 $[1^4]$, 杨表 1 个, $d^{[1^4]}=1$; 杨图 $[2,1^2]$, 杨表 3 个, $d^{[2,1^2]}=3$; 杨图 $[3,1]$, 杨表 3 个, $d^{[3,1]}=3$; 杨图 $[2^2]$, 杨表 2 个, $d^{[2^2]}=2$; 杨图 $[4]$, 杨表 1 个, $d^{[4]}=1$. 与例 3.3 相一致, 在 S_4 的 5 个不等价不可约表示中, 两个一维, 一个二维, 两个三维.

S_n 不可约表示的维数除了可由杨表数确定外, 也可以用如下的代数方法求得:

定理 3.2 S_n 与杨图 $[\nu]$ 相应的不可约表示 $D^{[\nu]}$ 的维数

$$d^{[\nu]}=\frac{n!}{\text{杨图}\,[\nu]\,\text{中各格子曲距之积}}, \tag{3.29}$$

其中一个格子的曲距定义为该格子右方与下方的格子数之和加1.

例如, 对于 S_4 群, 按 (3.29) 式得

$$d^{[3,1]}=\frac{4!}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4&2&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}}=\frac{4!}{4\times2\times1\times1}=3,$$

其中, 分母中各格子中的数字是该格子的曲距, 该结果与例 3.8 所得结果一致. 再如, 对于 S_3 群

$$d^{[2,1]}=\frac{3!}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}}=\frac{3!}{3\times1\times1}=2,$$

与例 3.8 所得结果一致. 同样的方法可证明其他情况的计算结果与例 3.8 的结果也一致.

3.3　S_n 群的不可约表示

3.3.1　S_n 群的不可约表示

由前面的讨论知, 由杨图与杨表可确定出不等价不可约表示的个数与维数. 这里将讨论 S_n 群不可约表示矩阵的求法.

为此目的, 先对杨图中的每个杨表作标号, 如用

$$[\nu]_1, [\nu]_2, \cdots, [\nu]_{d^{[\nu]}} \tag{3.30}$$

标记杨图为 $[\nu]$ 的各杨表. 这里假设杨图 $[\nu]$ 共有 $d^{[\nu]}$ 个杨表, 即假设相应的不可约表示 $D^{[\nu]}(S_n)$ 是 $d^{[\nu]}$ 维的, 则矩阵元为

$$D_{ij}^{[\nu]}(S_n)\quad (i、j=1,2,\cdots,d^{[\nu]}), \tag{3.31}$$

其中的行、列指标 i、j 是 (3.30) 式中杨表的标号.

根据置换群理论, 任意两相邻数字的对换, 例如, 对换 $(\ k-1\quad k\ )$ 的不可约表示矩阵元

$$D_{ij}^{[\nu]}(k-1\ k)=\begin{cases}1/\sigma, & (若\ i=j),\\ \sqrt{\sigma^2-1}/|\sigma|, & (若\ i\neq j,\ 且\ [\nu]_i=(k-1\ k)\,[\nu]_j),\\ 0, & 其他情况,\end{cases} \tag{3.32}$$

其中的 $(\ k-1\quad k\ )\,[\nu]_j$ 代表将杨表 $[\nu]_j$ 中的数字 $k-1$ 与 k 对换后得到的杨表. σ 为在杨表 $[\nu]_j$ 中由数字 $k-1$ 到达 k 时的轴距. 轴距的确定方法是: 规定沿着杨

表向上或向右移动一格为 $+1$, 向下或向左移动一格为 -1, 则从 $k-1$ 出发, 沿着直角路线到达 k 总共经过的格子的代数和就是轴距.

(3.32) 式仅给出了两相邻数字对换的不可约表示的矩阵, 再由递推关系

$$(\ i\quad j\ ) = (\ i+1\quad j\ )(\ i\quad i+1\ )(\ i+1\quad j\ ), \tag{3.33}$$

就可将任一两数字的对换用相邻数字的对换表示出来, 如

$$(\ 1\quad 3\ ) = (\ 2\quad 3\ )(\ 1\quad 2\ )(\ 2\quad 3\ ),\quad (\ 2\quad 4\ ) = (\ 3\quad 4\ )(\ 2\quad 3\ )(\ 3\quad 4\ ),$$

$$\begin{aligned}(\ 1\quad 4\ ) &= (\ 2\quad 4\ )(\ 1\quad 2\ )(\ 2\quad 4\ )\\ &= (\ 3\quad 4\ )(\ 2\quad 3\ )(\ 3\quad 4\ )(\ 1\quad 2\ )(\ 3\quad 4\ )(\ 2\quad 3\ )(\ 3\quad 4\ ).\end{aligned}$$

由于任一置换都可分解为若干个对换之积, 这样只要知道了所有相邻元素 $k-1$ 与 k 对换的表示矩阵 $D^{[\nu]}(\ k-1\quad k\ )$, 置换群 S_n 的任一元素的表示矩阵也就知道了.

例 3.9 S_2 群的不可约表示矩阵.

由前面的讨论知, S_2 群的配分、杨图与杨表如图 3.6 所示.

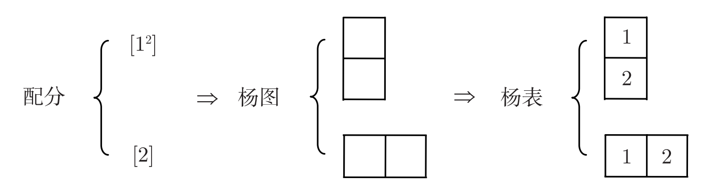


图 3.6 S_2 群的配分、杨图与杨表

如例 3.1 或例 3.8 所述, S_2 有两个一维不可约表示, 一个是 $D^{[1^2]}(S_2)$, 另一个是 $D^{[2]}(S_2)$. 再由 (3.32) 式就可求出各元素的表示矩阵 (一维是常数) 了. 比如, 在配分 $[1^2]$ 的杨表中, $1\Rightarrow 2$ 的轴距为 $\sigma=-1$, 由 (3.32) 式知

$$D^{[1^2]}(\ 1\quad 2\ ) = -1, \tag{3.34}$$

又 $p_e = (\ 1\quad 2\ )(\ 1\quad 2\ ) = (1)(2)$, 故

$$D^{[1^2]}(p_e) = 1. \tag{3.35}$$

可见, $D^{[1^2]}(S_2)$ 是 S_2 的非平庸一维表示. 另外, 在配分 [2] 的杨表中, $1\Rightarrow 2$ 的轴距为 $\sigma=1$, 由 (3.32) 式知

$$D^{[2]}(\ 1\quad 2\ ) = 1,\quad \Rightarrow D^{[2]}(p_e) = 1, \tag{3.36}$$

因此, $D^{[2]}(S_2)$ 是平庸一维表示.

例 3.10 S_3 群的不可约表示矩阵.

由前面的讨论知, S_3 群的配分、杨图与杨表如图 3.7 所示.

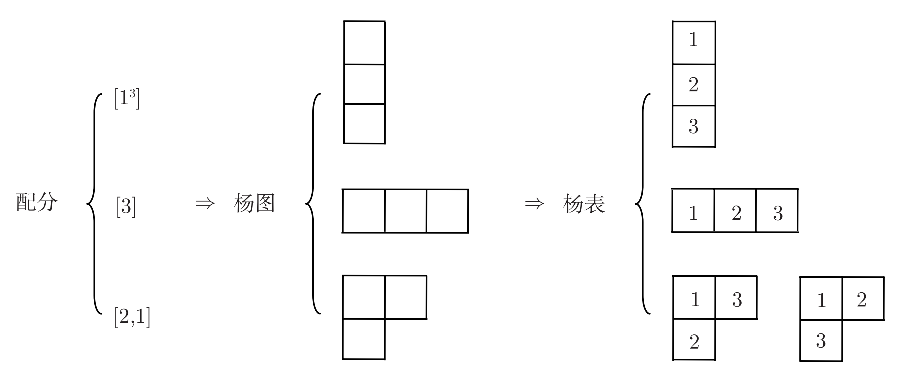


图 3.7 S_3 群的配分、杨图与杨表

如例 3.2 或例 3.8 所述, S_3 有两个一维表示 $D^{[1^3]}(S_3)$ 与 $D^{[3]}(S_3)$, 一个二维表示 $D^{[2,1]}(S_3)$, 再由 (3.32) 式就可以求出各元素在不同表示中的矩阵了. 比如, 在配分 $[1^3]$ 的杨表中, $1 \Rightarrow 2$ 的轴距 $\sigma = -1$, $2 \Rightarrow 3$ 的轴距 $\sigma = -1$, 故

$$D^{[1^3]}(\ 1 \quad 2\ ) = D^{[1^3]}(p_a) = -1, \quad D^{[1^3]}(\ 2 \quad 3\ ) = D^{[1^3]}(p_c) = -1, \tag{3.37}$$

再由 (3.9) 与 (3.33) 两式得

$$\begin{aligned} &(\ 1 \quad 3\ ) = (\ 2 \quad 3\ )(\ 1 \quad 2\ )(\ 2 \quad 3\ ), \\ &(\ 1 \quad 2 \quad 3\ ) = (\ 1 \quad 2\ )(\ 2 \quad 3\ ), \\ &(\ 1 \quad 3 \quad 2\ ) = (\ 1 \quad 3\ )(\ 3 \quad 2\ ) = (\ 1 \quad 3\ )(\ 2 \quad 3\ ), \\ &p_e = (\ 1 \quad 2\ )(\ 1 \quad 2\ ) = (\ 2 \quad 3\ )(\ 2 \quad 3\ ), \end{aligned} \tag{3.38}$$

故

$$\begin{aligned} &D^{[1^3]}(\ 1 \quad 3\ ) = D^{[1^3]}(p_b) = -1, \quad D^{[1^3]}(\ 1 \quad 3 \quad 2\ ) = D^{[1^3]}(p_d) = 1, \\ &D^{[1^3]}(\ 1 \quad 2 \quad 3\ ) = D^{[1^3]}(p_f) = 1, \quad D^{[1^3]}(p_e) = 1. \end{aligned} \tag{3.39}$$

(3.37) 与 (3.39) 式合在一起即为表示 $D^{[1^3]}(S_3)$, 与 D_3 群表示的 (2.29) 式即 $D^{(1)}(D_3)$ 相一致, 是 S_3 群的非平庸一维表示.

在配分 [3] 的杨表中, $1 \Rightarrow 2$ 的轴距 $\sigma = 1$, $2 \Rightarrow 3$ 的轴距 $\sigma = 1$, 故经与 (3.37)~(3.39) 式同样的分析知

$$D^{[3]}(p) = 1 \quad (p \in S_3), \tag{3.40}$$

所以 $D^{[3]}(S_3)$ 与 D_3 群表示的 (2.28) 式即 $D^{(0)}(D_3)$ 相一致, 是 S_3 群的平庸一维表示.

对配分 $[2,1]$ 的两个杨表作标号, 如图 3.8 所示.

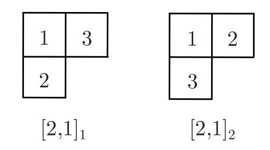


图 3.8　配分 $[2,1]$ 两个编了号的杨表

对于杨表 $[2,1]_1$ 与 $[2,1]_2$, $1 \Rightarrow 2$ 的轴距 σ 分别为 -1 与 1, 由 (3.32) 式知, 矩阵元

$$D_{11}^{[2,1]}(\,1\quad 2\,) = -1, \quad D_{22}^{[2,1]}(\,1\quad 2\,) = 1. \tag{3.41a}$$

由于 $[2,1]_{1(2)} \neq (\,1\quad 2\,)\,[2,1]_{2(1)}$, 由 (3.32) 式知

$$D_{12}^{[2,1]}(\,1\quad 2\,) = D_{21}^{[2,1]}(\,1\quad 2\,) = 0. \tag{3.41b}$$

由此得表示矩阵

$$D^{[2,1]}(\,1\quad 2\,) = D^{[2,1]}(p_a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.41c}$$

进一步, 对于杨表 $[2,1]_1$ 与 $[2,1]_2$, $2 \Rightarrow 3$ 的轴距 σ 分别为 2 与 -2, 由 (3.32) 式知

$$D_{11}^{[2,1]}(\,2\quad 3\,) = \frac{1}{2}, \quad D_{22}^{[2,1]}(\,2\quad 3\,) = -\frac{1}{2}. \tag{3.42a}$$

又 $[2,1]_{1(2)} = (\,2\quad 3\,)\,[2,1]_{2(1)}$, 由 (3.32) 式得

$$D_{12}^{[2,1]}(\,2\quad 3\,) = D_{21}^{[2,1]}(\,2\quad 3\,) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{3.42b}$$

这样, 表示矩阵

$$D^{[2,1]}(\,2\quad 3\,) = D^{[2,1]}(p_c) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.42c}$$

再利用关系 (3.38) 式, 由 (3.41c) 与 (3.42c) 两式可求得其他元素的表示矩阵, 结果为

$$
\begin{aligned}
&D^{[2,1]}(\ 1\quad 3\ ) = D^{[2,1]}(p_b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
&D^{[2,1]}(\ 1\quad 3\quad 2\ ) = D^{[2,1]}(p_d) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
&D^{[2,1]}(\ 1\quad 2\quad 3\ ) = D^{[2,1]}(p_f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
&D^{[2,1]}(p_e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

(3.41)~(3.43) 式构成 S_3 群的不可约表示 $D^{[2,1]}(S_3)$, 与 D_3 群表示的 (2.65) 式即 $D^{(2)}(D_3)$ 相一致, 是 S_3 群的二维不可约表示.

以上讨论表明, S_3 与 D_3 群的不可约表示一一对应, 完全相同, 这是显然的. 因为如 (1.90) 式所示, S_3 与 D_3 群同构, 一者的表示肯定也是另者的表示.

例 3.11 S_4 群的不可约表示矩阵 $D^{[3,1]}(S_4)$.

配分 $[3,1]$ 的杨表如图 3.9 所示.

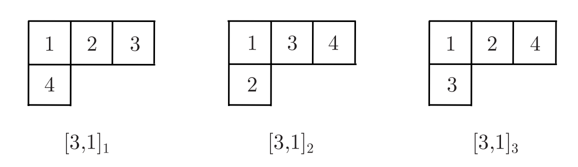


图 3.9 配分 $[3,1]$ 三个编了号的杨表

表明表示矩阵 $D^{[3,1]}(S_4)$ 是三维的, 共有 24 个矩阵. 如上所述, 求解这些矩阵的关键在于求出 3 个相邻数字对换的矩阵: $D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )$、$D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )$ 与 $D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )$, 求得这 3 个矩阵后, 利用 (3.9) 与 (3.33) 式, 其他矩阵也就知道了.

在杨表 $[3,1]_1$、$[3,1]_2$ 与 $[3,1]_3$ 中, $1 \Rightarrow 2$ 的轴距 σ 分别为 1、-1 与 1, 按照 (3.32) 式

$$
D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{11} = 1, \quad D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{22} = -1, \quad D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{33} = 1. \tag{3.44a}
$$

又 $[3,1]_{1(2)} \neq (\ 1\quad 2\ )\,[3,1]_{2(1)}$, $[3,1]_{1(3)} \neq (\ 1\quad 2\ )\,[3,1]_{3(1)}$, $[3,1]_{2(3)} \neq (\ 1\quad 2\ )\,[3,1]_{3(2)}$,

由 (3.32) 式知

$$\begin{aligned} &D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{12}=D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{21}=0,\\ &D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{13}=D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{31}=0,\\ &D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{23}=D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{32}=0. \end{aligned} \tag{3.44b}$$

这样

$$D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.44c}$$

在杨表 $[3,1]_1$、$[3,1]_2$ 与 $[3,1]_3$ 中, $2\Rightarrow 3$ 的轴距 σ 分别为 1、2 与 -2, 由 (3.32) 式得

$$D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{11}=1,\quad D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{22}=\frac{1}{2},\quad D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\ )_{33}=-\frac{1}{2}, \tag{3.45a}$$

再 $[3,1]_{1(2)}\neq(\ 2\quad 3\ )\,[3,1]_{2(1)}$, $[3,1]_{1(3)}\neq(\ 2\quad 3\ )\,[3,1]_{3(1)}$, $[3,1]_{2(3)}=(\ 2\quad 3\ )\,[3,1]_{3(2)}$, 按照 (3.32) 式

$$\begin{aligned} &D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{12}=D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{21}=0,\\ &D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{13}=D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{31}=0,\\ &D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{23}=D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )_{32}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \tag{3.45b}$$

所以

$$D^{[3,1]}(\ 2\quad 3\ )=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.45c}$$

在杨表 $[3,1]_1$、$[3,1]_2$ 与 $[3,1]_3$ 中, $3\Rightarrow 4$ 的轴距 σ 分别为 -3、1 与 3, 则

$$D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{11}=-\frac{1}{3},\quad D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{22}=1,\quad D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{33}=\frac{1}{3}. \tag{3.46a}$$

另 $[3,1]_{1(2)}\neq(\ 3\quad 4\ )\,[3,1]_{2(1)}$, $[3,1]_{1(3)}=(\ 3\quad 4\ )\,[3,1]_{3(1)}$, $[3,1]_{2(3)}\neq(\ 3\quad 4\ )\,[3,1]_{3(2)}$, 有

$$\begin{aligned} &D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{12}=D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{21}=0,\\ &D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{13}=D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{31}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\ &D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{23}=D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ )_{32}=0, \end{aligned} \tag{3.46b}$$

因此

$$D^{[3,1]}(\ 3\quad 4\ ) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{3.46c}$$

有了 (3.44c)、(3.45c) 与 (3.46c) 三式, 就可以求得其他 21 个元素的表示矩阵了, 方法只是矩阵相乘, 但过程还是很烦琐的. 这里每类只给出一个元素的表示矩阵, 有兴趣的读者可自行求出剩余元素的表示矩阵.

由例 3.3 知, S_4 共有 5 个类, 其中 $[1^4]$ 类只有 1 个元素

$$p_e = (1)(2)(3)(4) = (\ 1\quad 2\ )(\ 1\quad 2\ ) = (\ 2\quad 3\ )(\ 2\quad 3\ ) = (\ 3\quad 4\ )(\ 3\quad 4\ ),$$

其表示矩阵为

$$D^{[31,]}(p_e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

$[2,1^2]$ 类共有 6 个元素, 如 $(\ 1\quad 2\ )$, $(\ 2\quad 3\ )$ 或 $(\ 3\quad 4\ )$ 等, 表示矩阵已由 (3.44c)、(3.45c) 或 (3.46c) 式给出.

$[2,2]$ 类共有 3 个元素, 如 $(\ 1\quad 2\ )(\ 3\quad 4\ )$ 等, 其表示矩阵为

$$D^{[3,1]}\left[(\ 1\quad 2\ )(\ 3\quad 4\ )\right] = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

$[3,1]$ 类共有 8 个元素, 如 $(\ 1\quad 2\quad 3\ ) = (\ 1\quad 2\ )(\ 2\quad 3\ )$ 等, 其表示矩阵为

$$D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\quad 3\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

$[4]$ 类共有 6 个元素, 如 $(\ 1\quad 2\quad 3\quad 4\ ) = (\ 1\quad 2\ )(\ 2\quad 3\ )(\ 3\quad 4\ )$ 等, 其表

示矩阵为

$$D^{[3,1]}(\ 1\quad 2\quad 3\quad 4\ ) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{6} \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

由以上所得结果得

$$\begin{aligned} &\sum_{g\in S_4} \chi^{[3,1]}(g)\chi^{[3,1]*}(g) = \sum_{[\mu]} n_{[\mu]}\chi^{[3,1]}(g_{[\mu]})\chi^{[3,1]*}(g_{[\mu]}) \\ =\ & \underbrace{1\times 3\times 3}_{[1^4]} + \underbrace{6\times 1\times 1}_{[2,1^2]} + \underbrace{3\times(-1)\times(-1)}_{[2,2]} + \underbrace{8\times 0\times 0}_{[3,1]} + \underbrace{6\times(-1)\times(-1)}_{[4]} \\ =\ & 9+6+3+0+6=24. \end{aligned} \tag{3.51}$$

其中 $n_{[\mu]}$ 是 $[\mu]$ 类中的元素数, $g_{[\mu]}$ 是 $[\mu]$ 类中的任一元素.(3.51) 式满足不可约表示矩阵的要求 (2.105) 式, 所以上面求得的 $D^{[3,1]}(S_4)$ 是 S_4 的一个不可约表示矩阵群.

用同样的方法可求得 S_4 的其他 4 个不可约表示矩阵群. 所用方法比较简单, 只是过程有些烦琐, 有兴趣的读者可自求之.

3.3.2　S_n 群不可约表示的降元分解

假设在某一组基矢下, 相对于杨图 $[\nu]=[\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k]$, n 元置换群 S_n 的不可约表示为

$$\left\{D^{[\nu]}(p)\,|p\in S_n\right\}. \tag{3.52}$$

如果用

$$\left\{D^{[\nu]}(p)\,|p\in S_{n-1}\right\} \tag{3.53}$$

作为 $n-1$ 元置换群 S_{n-1} 的表示时, 一般来说它不再是不可约的了. 适当地选取一组新基矢, 即对 (3.53) 式的表示矩阵作一相似变换, 可将其分块对角化, 得

$$D^{[\nu]}(p) = \sum_i {}^{\oplus} D^{[\nu_i']}(p) \quad (p\in S_{n-1}), \tag{3.54}$$

其中, $[\nu_i']$ 是 $n-1$ 个数字的第 i 种配分, $D^{[\nu_i']}(p)(p\in S_{n-1})$ 是 S_{n-1} 群的第 i 个不可约表示, 它由如下定理确定:

定理 3.3　对于 n 元杨图 $[\nu]$, 如果某一行的格子数多于下一行的格子数, 从该行移去一个格子得到一个 $n-1$ 元杨图 $[\nu']$. 由此得到的所有可能的 $n-1$ 元杨图, 就是 S_n 的不可约表示 $[\nu]$ 中所包含的各种 S_{n-1} 的不可约表示 $[\nu']$.

在降元分解 n 元杨图 $[\nu]$ 时, 移去格子那一行的格子数一定要多于下一行的格子数, 以确保去掉格子后的剩余部分仍是一个杨图. 由于每次只能移去一个格子, S_{n-1} 的每个不可约表示在 (3.54) 式中最多只能出现一次.

例如, S_5 群的杨图 $\left[2^2,1\right]$, 有如图 3.10 所示的两种降元分解方式.

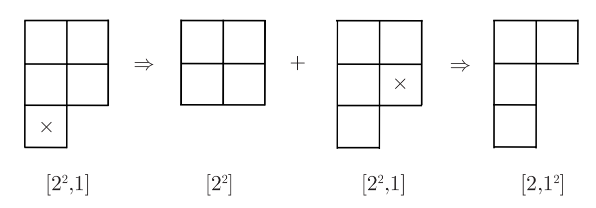


图 3.10 S_5 群杨图 $\left[2^2,1\right]$ 的两种降元分解

而图 3.11 的分解是不允许的. 因为移除格子那一行的格子不多于下一行的格子, 若从该行去掉一个格子, 则剩余部分不再是杨图了.

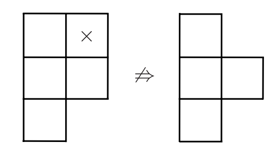


图 3.11 不允许降元分解的 S_5 群杨图 $\left[2^2,1\right]$

这样, S_5 群的杨图 $\left[2^2,1\right]$ 只能降元分解到 S_4 群的杨图 $\left[2^2\right]$ 与 $\left[2,1^2\right]$, 相应的表示有关系

$$D^{\left[2^2,1\right]}(p)=D^{\left[2^2\right]}(p)\oplus D^{\left[2,1^2\right]}(p)\quad(p\in S_4).\tag{3.55}$$

例 3.12 由 (3.34)~(3.36) 式知, S_2 群有两个不可约表示

$$\begin{aligned}&D^{\left[1^2\right]}(p_e)=1,\quad D^{\left[1^2\right]}(\;1\quad 2\;)=-1;\\&D^{[2]}(p_e)=1,\quad D^{[2]}(\;1\quad 2\;)=1.\end{aligned}\tag{3.56}$$

两者分别为非平庸与平庸一维表示. 对于 S_3 群, 由例 3.10 的讨论知, 元素 (p_e)、$(\;1\quad 2\;)\in S_3$ 的三个不可约表示分别为

$$\begin{aligned}&D^{\left[1^3\right]}(p_e)=1,\quad D^{\left[1^3\right]}(\;1\quad 2\;)=-1;\\&D^{[3]}(p_e)=1,\quad D^{[3]}(\;1\quad 2\;)=1;\\&D^{[2,1]}(p_e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad D^{[2,1]}(\;1\quad 2\;)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.57}$$

按定理 3.3, (3.57) 式可降元分解为 (3.56) 式的直和. 例如, 对于表示 $\left[1^3\right]$, 杨图的降元分解如图 3.12 所示.

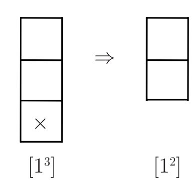


图 3.12　S_3 群杨图 $[1^3]$ 的降元分解

相应的表示有关系

$$D^{[1^3]}(p) = D^{[1^2]}(p) \quad (p \in S_2), \tag{3.58}$$

即

$$D^{[1^3]}(p_e) = D^{[1^2]}(p_e) = 1, \quad D^{[1^3]}(\ 1 \quad 2\ ) = D^{[1^2]}(\ 1 \quad 2\ ) = -1, \tag{3.59}$$

与 (3.56) 及 (3.57) 两式相一致.

对于表示 [3], 其杨图的降元分解如图 3.13 所示.

[3]　　[2]

图 3.13　S_3 群杨图 [3] 的降元分解

相应的表示有关系

$$D^{[3]}(p) = D^{[2]}(p) \quad (p \in S_2), \tag{3.60}$$

或

$$D^{[3]}(p_e) = D^{[2]}(p_e) = 1, \quad D^{[3]}(\ 1 \quad 2\ ) = D^{[2]}(\ 1 \quad 2\ ) = 1, \tag{3.61}$$

与 (3.56) 及 (3.57) 两式相一致.

对于表示 $[2,1]$, 其杨图的降元分解如图 3.14 所示.

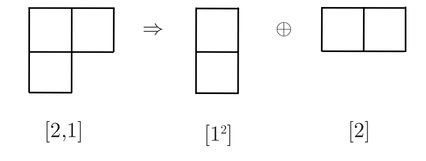


图 3.14　S_3 群杨图 $[2,1]$ 的两种降元分解

这样

$$D^{[2,1]}(p) = D^{[1^2]}(p) \oplus D^{[2]}(p) \quad (p \in S_2), \tag{3.62}$$

亦即

$$\begin{aligned}&D^{[2,1]}(p_e)=D^{[1^2]}(p_e)\oplus D^{[2]}(p_e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\\&D^{[2,1]}(\,1\quad 2\,)=D^{[1^2]}(\,1\quad 2\,)\oplus D^{[2]}(\,1\quad 2\,)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.63}$$

与 (3.56) 及 (3.57) 两式相一致.

例 3.13　由 (3.38)、(3.44c) 与 (3.45c) 式, 可得 S_4 群的表示 $[3,1]$ 的如下 6 个表示矩阵

$$\begin{aligned}&D^{[3,1]}(p_e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D^{[3,1]}(\,1\quad 2\,)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\\&D^{[3,1]}(\,2\quad 3\,)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad D^{[3,1]}(\,1\quad 3\,)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\\&D^{[3,1]}(\,1\quad 2\quad 3\,)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad D^{[3,1]}(\,1\quad 3\quad 2\,)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.64}$$

按定理 3.3, S_4 群的杨图 $[3,1]$ 有如图 3.15 所示的两种降元分解方式.

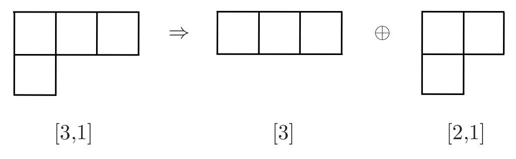


图 3.15　S_4 群杨图 $[3,1]$ 的两种降元分解

可见

$$D^{[3,1]}(p)=D^{[3]}(p)\oplus D^{[2,1]}(p)\quad(p\in S_3).\tag{3.65}$$

由 (3.40)、(3.41c)、(3.42c) 及 (3.43) 四式知

$$
\begin{aligned}
&D^{[3]}(p)=1 \quad (p\in S_3);\\
&D^{[2,1]}(p_e)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad D^{[2,1]}(\ 1\quad 2\ )=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\
&D^{[2,1]}(\ 2\quad 3\ )=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\quad D^{[2,1]}(\ 1\quad 3\ )=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\\
&D^{[2,1]}(\ 1\quad 2\quad 3\ )=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\quad D^{[2,1]}(\ 1\quad 3\quad 2\ )=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

上式与 (3.64) 式比较知, 降元分解 (3.65) 式成立.

3.4　S_n 群不可约表示的特征标

如 2.5 节所述, 群的不可约表示的特征标是类的函数. 对于 S_n 群, 由 3.2 节的讨论知, 不等价不可约表示数 = 类数 = 配分数 = 杨图数, 所以 S_n 群的不等价不可约表示与类都可用配分或杨图来标记, 其特征标通常记作 $\chi^{[\nu]}_{[\mu]}$, 称为 S_n 的单纯特征标. 其中右上角的 $[\nu]$ 是 n 的一种配分 $[\nu]=[\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k]$, 用以标记 S_n 的某个不可约表示; 右下角的 $[\mu]=[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_j]$ 也是 n 的一种配分, 用以标记 S_n 中的某个类. 这样, $\chi^{[\nu]}_{[\mu]}$ 给出的是 S_n 的类 $[\mu]$ 在表示 $[\nu]$ 中的特征标. 为了求得 $\chi^{[\nu]}_{[\mu]}$, 先将代表类的杨图 $[\mu]$ 的格子按行标号, 即处在同一行的格子填上相同的数字——行号, 标号由上而下依次增大, 如图 3.16 所示.

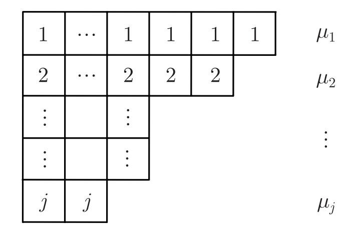


图 3.16　类 $[\mu]$ 的格子按行编号

具有相同标号的格子称为连续格子. 按置换群理论

$$\chi_{[\mu]}^{[\nu]} = \sum_i (-1)^{t_i}, \tag{3.67}$$

其中的求和指标 i 指的是: 将 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_j$ 个连续格子的标号依次填充到杨图 $[\nu]$ 中的第 i 种方法, t_i 为在方法 i 中填充的各连续格子的距之和, 各连续格子的距定义为最长一列的格子数减 1.

将 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_j$ 个连续格子的标号填充到杨图 $[\nu] = [\ \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_k\ ]$ 的方法是: 相同标号的格子不能出现间断, 即标号相同的格子需组成杨图上的一个连续段; 每次填充后的方格图为一杨图, 且从上而下或从左而右格子的标号是不减次序.

上述连续格子标号的填充法通常称为正则填充法, 不能用正则填充法完成填充时, 特征标

$$\chi_{[\mu]}^{[\nu]} = 0. \tag{3.68}$$

这里想再一提的是, 标号相同格子的连续段需处在杨图右下方的边缘带上, 且在相同标号的格子数 $\geqslant 3$ 的情况下, 段两端的格子有且仅有一边与其他同标号的格子相连, 段中间的格子有且仅有两边与其他同标号的格子相连, 如图 3.17 所示. 该图给出了在杨图 [2, 1] 的基础上, 再填上 6 个标号为 i 的格子的一种填充法.

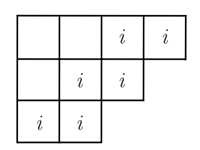


图 3.17 格子 i 的一个连续段

当然还有其他的填充法, 有兴趣的读者可自找之. 但如图 3.18 所示的两种填充法是不允许的.

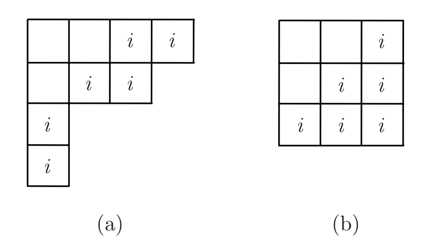


图 3.18 标号 i 的两种不允许填充法

(a) 的问题在于一、二列两相邻的格子 i 没有连接边, 出现间断; (b) 中间格子存在着三边连接的现象. 还有其他不允许的填充方法, 有兴趣的读者可自找之.

由正则填充法再加上 (3.67) 与 (3.68) 两式, 不难求得 S_n 群的不同类在各不可约表示中的特征标.

例 3.14　S_1、S_2、S_3 与 S_4 群不可约表示的特征标.

S_1 群不可约表示的特征标只有 $\chi_{[1]}^{[1]}$, 类 $[\mu]=[1]$, 表示 $[\nu]=[1]$, 如图 3.19 所示.

$[\nu]$=[1]　□　$[\mu]$=[1]　[1]　⇒　[1]

图 3.19　特征标 $\chi_{[1]}^{[1]}$ 杨图的正则填充

按定义, 标号为 1 的格子的距 $t=0$, 由 (3.67) 式知

$$\chi_{[1]}^{[1]}=1. \tag{3.69}$$

这是熟知的事实, S_1 群只有一个元素, 单位元 $p_e=(1)$, 只有一维平庸表示 1.

S_2 群不可约表示的特征标如表 3.1 所示.

表 3.1　S_2 群不可约表示的特征标表

		类	
		$[1^2]$	$[2]$
不可约表示	$[2]$	1	1
	$[1^2]$	1	-1

所列结果是显然的. S_2 是二阶群, 有两个一维表示, 一个是平庸, 另一个是非平庸. 利用 (3.67) 式与正则填充法, 不难求得表 3.1 中的各特征标. 如 $\chi_{[2]}^{[1^2]}$, 如图 3.20 所示.

$[\nu]$=$[1^2]$　(竖列两格)　$[\mu]$=[2]　[1|1]　⇒　(竖列 1, 1)

图 3.20　特征标 $\chi_{[2]}^{[1^2]}$ 杨图的正则填充

标号为 1 的连续格子的距 $t=1$, 由 (3.67) 式知

$$\chi_{[2]}^{[1^2]}=(-1)^1=-1. \tag{3.70}$$

同样的方法可求得表 3.1 中的其他特征标, 有兴趣的读者可自求之.

S_3 群不可约表示的特征标如表 3.2 所示.

表 3.2 S_3 群不可约表示的特征标表

		类		
		$[1^3]$	$[3]$	$[2,1]$
不可约表示	$[3]$	1	1	1
	$[1^3]$	1	1	-1
	$[2,1]$	2	-1	0

该表与其同构的 D_3 群的特征标表 2.2 完全相同. 利用 (3.67) 式与正则填充法, 不难求得表 3.2 中的各特征标. 如 $\chi^{[2,1]}_{[1^3]}$, 如图 3.21 所示.

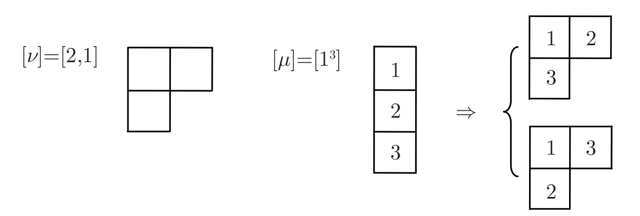


图 3.21 特征标 $\chi^{[2,1]}_{[1^3]}$ 杨图的正则填充

有两种填充法, 其中

$$t_1 = 0 + 0 + 0 = 0, \quad t_2 = 0 + 0 + 0 = 0, \tag{3.71}$$

故

$$\chi^{[2,1]}_{[1^3]} = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{t_i} = (-1)^{t_1} + (-1)^{t_2} = 1 + 1 = 2. \tag{3.72}$$

再如 $\chi^{[2,1]}_{[2,1]}$, 如图 3.22 所示.

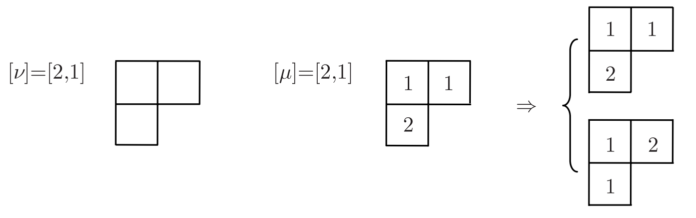


图 3.22 特征标 $\chi^{[2,1]}_{[2,1]}$ 杨图的正则填充

有两种填充法, 其中

$$t_1 = 0 + 0 = 0, \quad t_2 = 1 + 0 = 1, \tag{3.73}$$

则由 (3.67) 式得

$$\chi^{[2,1]}_{[2,1]} = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{t_i} = (-1)^{t_1} + (-1)^{t_2} = 1 - 1 = 0. \tag{3.74}$$

同样的方法可求得其他特征标, 有兴趣的读者可自求之.

S_4 群不可约表示的特征标如表 3.3 所示.

表 3.3　S_4 群不可约表示的特征标表

		类				
		$[1^4]$	$[4]$	$[2^2]$	$[3,1]$	$[2,1^2]$
不	$[4]$	1	1	1	1	1
可	$[1^4]$	1	-1	1	1	-1
约	$[2^2]$	2	0	2	-1	0
表	$[3,1]$	3	-1	-1	0	1
示	$[2,1^2]$	3	1	-1	0	-1

由正则填充法, 按 (3.67) 与 (3.68) 式, 不难求得表中的各特征标. 如 $\chi^{[3,1]}_{[1^4]}$, 如图 3.23 所示.

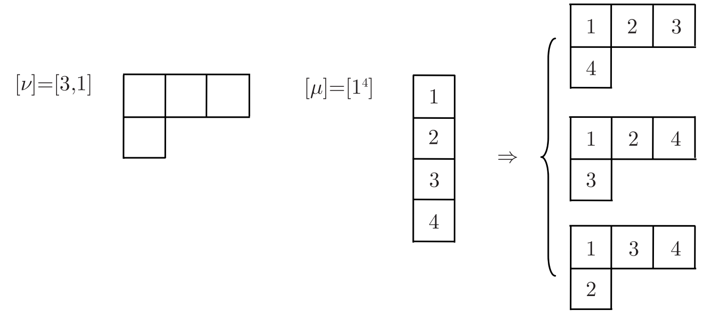


图 3.23　特征标 $\chi^{[3,1]}_{[1^4]}$ 杨图的正则填充

有三种填充法, 其中

$$t_1 = 0+0+0+0 = 0,\quad t_2 = 0+0+0+0 = 0,\quad t_3 = 0+0+0+0 = 0, \tag{3.75}$$

则由 (3.67) 式知

$$\chi^{[3,1]}_{[1^4]} = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{t_i} = (-1)^{t_1} + (-1)^{t_2} + (-1)^{t_3} = 1+1+1 = 3. \tag{3.76}$$

再如 $\chi^{[2^2]}_{[2,1^2]}$, 如图 3.24 所示.

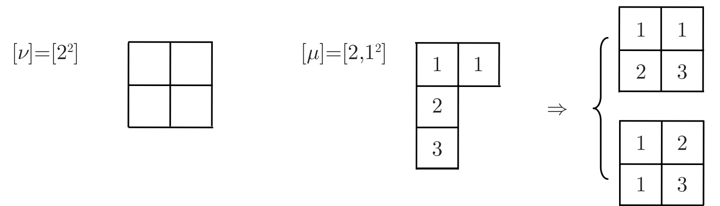


图 3.24　特征标 $\chi^{[2^2]}_{[2,1^2]}$ 杨图的正则填充

有两种填充法, 其中

$$t_1 = 0 + 0 + 0 = 0, \quad t_2 = 1 + 0 + 0 = 1, \tag{3.77}$$

则由 (3.67) 式知

$$\chi^{[2^2]}_{[2,1^2]} = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{t_i} = (-1)^{t_1} + (-1)^{t_2} = 1 - 1 = 0. \tag{3.78}$$

另如 $\chi^{[2^2]}_{[4]}$, 如图 3.25 所示.

$[\nu]=[2^2]$　　$[\mu]=[4]$　1 1 1 1　$\nRightarrow$　1 1 / 1 1

图 3.25　不允许正则填充的特征标 $\chi^{[2^2]}_{[4]}$ 杨图

该情况下的正则填充是不允许的, 因为边缘带两端的格子是双边连接, 按照 (3.68) 式

$$\chi^{[2^2]}_{[4]} = 0. \tag{3.79}$$

用同样的方法可求得表 3.3 中的其他特征标, 有兴趣的读者可自求之. 由表 3.3 知, 表示 [3, 1] 在各类中的特征标与例 3.11 求得的表示矩阵的特征标相一致.

第 4 章　李群及其表示

前三章讨论的主要是有限群, 从本章开始将讨论无限群, 主要是李群. 李群是 19 世纪 90 年代, 由挪威数学家 M. S. Lie 等建立起来的一种连续变换群, 是近世代数的一个重要分支, 在物理学中有着重要的应用. 本章将介绍李群及其表示的基本知识, 例如, 李群的连通性与紧致性; 李群的无穷小生成元与无穷小算符; 李群的表示及 $SU(l)$ 群不可约表示直积的杨图展开等.

4.1　李群与举例

4.1.1　李群

考虑复数集合

$$U(1)=\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|\theta\in R\right\}, \tag{4.1}$$

在普通的数乘下, 集合 $U(1)$ 中的元素 $A(\theta)$、$A(\theta')\in U(1)$ 满足关系

$$\begin{aligned}&A(\theta)A(\theta')=A(\theta+\theta')\in U(1),\\&[A(\theta)]^{-1}=A(-\theta),\\&e=A(0),\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $e=A(0)$ 为单位元. 上式表明, 集合 (4.1) 满足群定义的 4 个条件: 封闭性满足, 逆元素与单位元存在, 另外结合律显然也成立, 所以集合 $U(1)$ 构成一个群. 该群的特点是, 元素 $A(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是参数 θ 的函数. 按定义, θ 可在整个实数域中连续取值, 元素 $A(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 个数无限且不可列, 所以集合 $U(1)$ 是一连续群且是一阿贝尔连续群.

在上例中, 元素 $A(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 仅由一个参数 θ 描述. 在一般情况下, 群 G 的元素可以是 m 个参数 $\theta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的函数, 通常称它们为群参数. 这时群元素可记为

$$A(\theta)=A(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\in G. \tag{4.3}$$

群的逆元素存在意味着对于任意一组参数 θ, 均有参数 θ^{-1} 存在, 使得

$$A(\theta)A(\theta^{-1})=A(\theta^{-1})A(\theta)=A(0)=e,\quad\Rightarrow A(\theta^{-1})=A(\theta)^{-1}, \tag{4.4}$$

表明逆元素的参数 θ^{-1} 与 θ 间应有一种函数关系

$$\theta_i^{-1} = f_i(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{4.5a}$$

或

$$\theta^{-1} = f(\theta), \tag{4.5b}$$

例如, 对于 $U(1)$ 群, $\theta^{-1} = -\theta$.

群的封闭性要求, 对于任意的群参数 α 与 β, 有群参数 γ 存在, 使得

$$A(\gamma) = A(\alpha)A(\beta) \in G, \tag{4.6}$$

因此 γ 与 α 及 β 之间应存在着一定的函数关系, 记作

$$\gamma_i = \phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{4.7a}$$

或

$$\gamma = \phi(\alpha; \beta), \tag{4.7b}$$

通常称 ϕ 为群 G 的组合函数, 例如, 对于 $U(1)$ 群, $\gamma = \theta + \theta'$.

另外, 群元素的乘法满足结合律, 即

$$A(\alpha)\left[A(\beta)A(\gamma)\right] = \left[A(\alpha)A(\beta)\right]A(\gamma), \tag{4.8}$$

所以组合函数应满足关系

$$\phi\left[\alpha; \phi(\beta; \gamma)\right] = \phi\left[\phi(\alpha; \beta); \gamma\right], \tag{4.9}$$

例如, 对于 $U(1)$ 群, 这意味着 $\theta + (\theta' + \theta'') = (\theta + \theta') + \theta''$.

在一般情况下, 若由 (4.5) 与 (4.7) 两式定义的函数 f 与 ϕ 都是其群参数的连续函数, 则称 G 为连续群; 若 f 与 ϕ 既连续又可微, 即 f 与 ϕ 都是群参数的解析函数, 则称 G 为李群 (Lie group). 所以李群是一种特殊的连续群.

对于 $U(1)$ 群, 由前面的讨论知, $\theta^{-1} = f(\theta) = -\theta$, $\gamma = \phi(\theta; \theta') = \theta + \theta'$, 故 f 与 ϕ 都是 θ 或 θ' 的连续可微的函数. 所以由定义知, $U(1)$ 群是一阿贝尔李群.

李群的独立参数的个数称为李群的阶. 例如, 李群 $U(1)$ 只有一个参数, 所以 $U(1)$ 是一阶李群. 群参数的变化范围称为群的参数空间, 例如, 李群 $U(1)$ 的参数空间是整个实数域 R.

4.1.2 李群举例

作为李群举例, 这里将讨论线性变换群或矩阵群. 线性变换群又称典型群, 是一种最简单的李群, 在物理中有着重要的应用.

1. 一般线性变换群

该类群是线性空间 L_l 中所有 $l\times l$ 非奇异复矩阵的集合, 记作 $GL(l,C)$, 它将 l 维线性空间中的矢量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_l)$ 变成 $x'=(x_1',x_2',\cdots,x_l')$, 其矩阵形式为

$$x'=Ax, \quad 或 \quad x_\mu'=\sum_\nu A_{\mu\nu}x_\nu \quad (\mu、\nu=1,2,\cdots,l), \tag{4.10}$$

其中 $A\in GL(l,C), \det A\neq 0, A_{\mu\nu}\in C$. 变换矩阵 A 共有 l^2 个矩阵元, 每一矩阵元又有一个实部与一个虚部, 所以 A 共有 $2l^2$ 个实参数, 亦即 $GL(l,C)$ 是 $2l^2$ 阶李群. 若 $A_{\mu\nu}\in R$, 则 $GL(l,C)$ 变成了 l 阶实矩阵群, 记为 $GL(l,R)$, 共有 l^2 个实参数, 即 $GL(l,R)$ 是 l^2 阶李群.

在 $GL(l,C)$ 中, $\det A=+1$ 矩阵的全体也构成一个群, 称为一般特殊 (或幺模) 线性变换群, 记作 $SL(l,C)$, 则

$$SL(l,C)=\left\{A\,\middle|\,A\in GL(l,C)且\det A=+1\right\}. \tag{4.11}$$

由于 $\det A=+1$ 贡献两个约束条件 (实部与虚部各一个), $SL(l,C)$ 共有 $2(l^2-1)$ 个实参数. 若 A 的矩阵元 $A_{\mu\nu}\in R$, 则得实的特殊 (或幺模) 线性变换群, 记为 $SL(l,R)$, 它的阶数为 l^2-1. 显然

$$\begin{aligned}&SL(l,R)=\left\{A\,\middle|\,A\in GL(l,R)\ \ 且\ \ \det A=+1\right\},\\&SL(l,R)\subset SL(l,C),\quad SL(l,C)\subset GL(l,C).\end{aligned} \tag{4.12}$$

2. 幺正群

记作 $U(l,C)$ 或简记为 $U(l)$, 该群由全体 l 阶非奇异复幺正矩阵组成, 即对于任意的 $A\in U(l)$, 有

$$AA^\dagger=A^\dagger A=I, \quad 或 \quad A^\dagger=A^{-1}, \tag{4.13a}$$

其中 I 为 $l\times l$ 单位矩阵, 或写成分量形式

$$\sum_\alpha A_{\mu\alpha}A_{\alpha\nu}^\dagger=\sum_\alpha A_{\mu\alpha}^\dagger A_{\alpha\nu}=\delta_{\mu\nu} \quad (\mu、\nu、\alpha=1,2,\cdots,l). \tag{4.13b}$$

由于

$$\det(AA^\dagger)=\det A\det A^\dagger=|\det A|^2,$$

(4.13a) 式表明

$$|\det A|^2=1. \tag{4.14}$$

$U(l)$ 群共有 $2l^2$ 个实参数, 但需满足 (4.13) 式的条件. 记 $B=AA^\dagger$, 或 $B_{\mu\nu}=\sum\limits_\alpha A_{\mu\alpha}A_{\alpha\nu}^\dagger$, 则 (4.13b) 式可写成

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

由于

$$B_{\nu\mu} = \sum_\alpha A_{\nu\alpha} A^\dagger_{\alpha\mu}, \quad \Rightarrow B^*_{\nu\mu} = \sum_\alpha (A^\dagger_{\alpha\mu})^* A^*_{\nu\alpha} = \sum_\alpha \tilde{A}_{\alpha\mu} \tilde{A}^*_{\alpha\nu} = \sum_\alpha A_{\mu\alpha} A^\dagger_{\alpha\nu} = B_{\mu\nu}, \tag{4.16}$$

因此, (4.15) 式左边的矩阵中, 独立的矩阵元只有处于右上三角区域的部分, 数目为 $l + l(l-1)/2$. 在这些矩阵元中, 处于非对角线上的矩阵元有实部与虚部两部分, 而对角线上的矩阵元, 由于

$$B_{\mu\mu} = \sum_\alpha A_{\mu\alpha} A^\dagger_{\alpha\mu} = \sum_\alpha A_{\mu\alpha} A^*_{\mu\alpha} = \sum_\alpha |A_{\mu\alpha}|^2, \tag{4.17}$$

只有实部. 因此 (4.15) 式给出的方程数为

$$2\left[l + \frac{l(l-1)}{2}\right] - l = l^2, \tag{4.18}$$

这样, $U(l)$ 群的独立参数为 $2l^2 - l^2 = l^2$ 个, $U(l)$ 群是 l^2 阶的.

在 $U(l)$ 中, $\det A = +1$ 的全体矩阵的集合也构成一个群, 记作 $SU(l)$, 称为特殊 (或幺模) 幺正群. 即

$$SU(l) = \left\{ A \,\middle|\, A \in U(l) \text{且} \det A = +1 \right\}, \tag{4.19}$$

由于 $|\det A|^2 = 1$, $\det A = 1$ 只贡献一个实数方程, 所以 $SU(l)$ 群共有 $l^2 - 1$ 个独立的实参数.

在幺正矩阵 A 的变换下, l 维线性空间中的矢量 x 变为 $x' = Ax$, 内积

$$(x', x') = (Ax, Ax) = (x, A^\dagger Ax) = (x, x), \tag{4.20}$$

即幺正变换不改变矢量的内积.

3. 正交群

这类群是由全体 l 阶复的正交矩阵构成的, 记作 $O(l, C)$, 即对于任意的 $A \in O(l, C)$, 要求

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = I, \quad \Rightarrow \tilde{A} = A^{-1}, \tag{4.21}$$

其中 $\tilde{A}$ 是 A 的转置矩阵. 由于

$$\det(\tilde{A}A) = \det\tilde{A}\det A = (\det A)^2, \tag{4.22}$$

所以 (4.21) 式表明

$$(\det A)^2 = 1, \quad \text{或} \quad \det A = \pm 1. \tag{4.23}$$

(4.21) 式的分量形式为

$$\sum_\alpha \tilde{A}_{\mu\alpha}A_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \Rightarrow \sum_\alpha A_{\alpha\mu}A_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu、\nu、\alpha = 1,2,\cdots,l), \tag{4.24}$$

上式对于角标 μ、ν 的交换是对称的. 若假设 $C = \tilde{A}A$, 或 $C_{\mu\nu} = \sum\limits_\alpha \tilde{A}_{\mu\alpha}A_{\alpha\nu}$, 则 (4.24) 式的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1l} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{l1} & C_{l2} & \cdots & C_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

由于 $C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}$, 上式左边独立的矩阵元只是三角区中的那部分, 数目为 $l + l(l-1)/2$. 每一矩阵元包含实部与虚部两部分, 所以上式贡献的约束条件数为

$$2\left[l + \frac{l(l-1)}{2}\right] = l^2 + l. \tag{4.26}$$

这样, 正交群 $O(l,C)$ 共有 $2l^2 - (l^2 + l) = l(l-1)$ 个实的独立参数.

满足 $\det A = +1$ 的所有复正交矩阵的集合构成特殊 (或幺模) 正交群, 记作 $SO(l,C)$, 即

$$SO(l,C) = \left\{A \,\middle|\, A \in O(l,C) \text{且} \det A = +1\right\}. \tag{4.27}$$

注意到 (4.21) 式, 有

$$\det A^{-1} = \det\tilde{A} = \det A, \tag{4.28}$$

这样, 对于任意的 $A \in O(l,C)$

$$ASO(l,C)A^{-1} = SO(l,C), \tag{4.29}$$

所以 $SO(l,C)$ 构成 $O(l,C)$ 的正规子群. 又

$$O(l,C) = SO(l,C) + ASO(l,C) \quad (A \in O(l,C) \text{且} \det A = -1), \tag{4.30}$$

商群 $O(l,C)/SO(l,C)$ 是二阶群.

若 $A\in O(l,C)$, 且 $A_{\mu\nu}\in R$, 则 $O(l,C)$ 变成 l 阶实的正交矩阵群, 记为 $O(l,R)$ 或简记为 $O(l)$, 它有 $l(l-1)/2$ 个实参数. 而 $\det A=+1$ 的全体实正交矩阵的集合, 构成特殊 (或幺模) 实正交矩阵群, 记为 $SO(l,R)$ 或简记为 $SO(l)$, 它构成 $O(l)$ 群的正规子群, 代表 l 维空间的纯转动, 称为 l 维旋转群.

在正交矩阵 A 的变换下, l 维线性空间中的矢量作变换

$$x'=Ax,\quad \text{或}\quad x'_\mu=\sum_\alpha A_{\mu\alpha}x_\alpha, \tag{4.31}$$

则该矢量长度的平方

$$x'^2=\sum_\mu x'_\mu x'_\mu=\sum_{\mu\nu\alpha}A_{\mu\nu}A_{\mu\alpha}x_\nu x_\alpha \overset{(4.24)\text{式}}{=\!=\!=} \sum_{\nu\alpha}\delta_{\nu\alpha}x_\nu x_\alpha=\sum_\nu x_\nu x_\nu=x^2, \tag{4.32}$$

表明正交变换不改变矢量的长度.

4. *齐次洛伦兹群*

在相对论中, 时间和空间坐标是相统一的, 它们一起构成闵可夫斯基 (Minkowski) 空间中的一个点 $x^\mu=(x^0,x^1,x^2,x^3)=(t,\boldsymbol{x})$, 其中 $x^0=t$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ 为逆变分量 (上指标), 或 $x_\mu=(x_0,x_1,x_2,x_3)=(t,-\boldsymbol{x})$, 其中 $x_0=x^0=t$, $x_1=-x^1=-x$, $x_2=-x^2=-y$, $x_3=-x^3=-z$ 为协变分量 (下指标). 这里与物理学中的量子场论一样, 在 Bjorken-Drell 度规下讨论问题, 所以需区分四维时空矢量的逆变、协变分量或上、下指标. 时间的逆变与协变分量相同, 空间的差了一负号.

四维时空的线性变换为

$$x'_\mu=\sum_\nu A_{\mu\nu}x^\nu\quad(\mu\text{、}\nu=0,1,2,3). \tag{4.33a}$$

由于在 Bjorken-Drell 度规下, 四维时空矢量各分量都是实的, 所以上式的变换矩阵元 $A_{\mu\nu}$ 需满足实数性条件

$$A_{\mu\nu}\in R. \tag{4.33b}$$

若在 (4.33) 式的变换下, 任一矢量的长度保持不变, 即

$$x'^2=\sum_\mu x'_\mu x'^\mu=t'^2-\boldsymbol{x}'^2=\sum_\mu x_\mu x^\mu=t^2-\boldsymbol{x}^2=x^2, \tag{4.34}$$

则称这种变换为齐次洛伦兹 (Lorentz) 变换, 其变换矩阵的全体构成一个群, 称为齐次洛伦兹群, 用 L 表示.

(4.34) 式与正交变换的 (4.32) 式完全一致, 所以 (4.33) 式的齐次洛伦兹变换也是一种正交变换, 或者说是闵可夫斯基四维空间的一种转动变换.

将 (4.33) 代入 (4.34) 式得

$$x'^2 = \sum_{\mu} x'_\mu x'^\mu = \sum_{\mu\nu\lambda} A_{\mu\nu} A^{\mu\lambda} x^\nu x_\lambda = x^2,$$

所以

$$\sum_{\mu} A_{\mu\nu} A^{\mu\lambda} = g_\nu^\lambda, \quad \Rightarrow \sum_{\mu} \tilde{A}_{\nu\mu} A^{\mu\lambda} = g_\nu^\lambda, \tag{4.35}$$

其中 g_ν^λ 是混合度规张量 (1.26) 式. (4.35) 式是齐次洛伦兹变换 $A \in L$ 需满足的条件, 称为正交条件. 由于上式右边 4×4 单位矩阵的右上三角或左下三角区域共有 10 个矩阵元, 与左边相等可得 10 个独立方程, 所以正交条件 (4.35) 式可给出 10 个约束条件, 而 $A \in L$ 共有 $4 \times 4 = 16$ 个参数, 因此 L 共有 $16 - 10 = 6$ 个独立参数. 由 (4.35) 式知

$$(\det A)^2 = 1, \quad 或 \quad \det A = \pm 1. \tag{4.36}$$

在齐次洛伦兹变换 $A \in L$ 中, 如果取 $A_{i0} = A_{0i} = 0(i = 1, 2, 3), A_{00} = 1$, 这时它就变成了三维空间中的正交变换, 所以三维空间正交群 $O(3) \subset L$.

齐次洛伦兹群 L 显然包含如下四个元素:

(1) 单位元 $I = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$.

(2) 空间反演 $\sigma = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

(3) 时间反演 $\tau = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

(4) 全反演 $\rho = \tau\sigma = \sigma\tau = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, -1)$.

它们的集合

$$V = \{I, \sigma, \tau, \rho\}, \tag{4.37}$$

构成一个四阶群.

顺便一提, 若变换 (4.33) 式改写成

$$x'_\mu = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} x^\nu + a_\mu, \tag{4.38}$$

其中 a_μ 为一平移实常数, 则称 (4.38) 式为非齐次洛伦兹变换. 在该变换下, 注意到正交条件 (4.35) 式, 闵可夫斯基空间中任意两点间的距离保持不变, 变换的全体称为非齐次洛伦兹群或庞加莱 (Poincaré) 群, 该群共有 10 个独立参数.

4.2 李群的连通性与紧致性

李群的元素由一组群参数描述, 所以通过对群参数的研究可获得李群的一些性质. 这里将据此讨论李群的连通性与紧致性问题.

4.2.1 李群的连通性

若李群 G 的参数空间中的任意两点, 可用此空间中的一条连续曲线连接起来, 则称 G 是连通的; 否则就是不连通的. 连通的 G 又可分为单连通与多连通. 若参数空间中任意两点间的任意两条连接曲线可经由参数空间内部使一条曲线连续变形为另一条, 则称 G 是单连通的 (simply connected); 反之, 若所述的两条曲线不能经由参数空间内部连续变形而重合, 则称 G 是多连通的 (multiply connected).

例 4.1 三维实正交群 $O(3)$.

$O(3)$ 群由三个参数 $[l(l-1)/2, l=3]$ 描述. 对于任意的 $A \in O(3), \det A = \pm 1$, 因此 $O(3)$ 群的参数空间分为不相连通的两叶, 分别处在 $\det A = +1$ 与 $\det A = -1$ 上, 如图 4.1 所示. 两叶无法用处于参数空间中的连续曲线连接起来, 所以 $O(3)$ 群是不连通的.

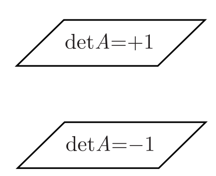


图 4.1 $O(3)$ 群参数空间不相连通的两叶

例 4.2 三维旋转群 $SO(3)$.

在 $SO(3)$ 群中, 元素 $A \in SO(3)$ 满足条件 $\det A = +1$, 所以 $SO(3)$ 群的参数仅处在 $\det A = +1$ 的那一叶上, $SO(3)$ 群是连通的.

$SO(3)$ 群代表三维空间的纯转动, 其元素可用转轴 (两参数) 与转角 (一参数) 描述. 这样, $SO(3)$ 群中的每一元素都对应于一个三维矢量, 该矢量的方向就是转轴方向, 矢量的长度代表转角的大小, 所以 $SO(3)$ 群的参数空间是一个半径为 π 的实心球体, 如图 4.2 所示.

除球面上的点外, $SO(3)$ 群的每一群元素都与球内的一个确定的点相对应. 由于绕任一轴转 π 与转 −π 角代表同一群元素, 球上任一直径的两个端点, 如图 4.2 中的 p_1 与 p_2 两点, 代表同一转动, 应视为同一点. 显然球体内的任意两点, 例如, a、b 两点可用一条属于球体内的连续曲线, 如点划线将它们连接起来, 因此 $SO(3)$

群是连通的, 但它不是单连通的. 如图 4.2 中的 a、b 两点, 亦可经由 p_1 与 p_2 两点相连, 如图 4.2 中的点线示. 而这条点线不可能连续变形到点划线, 所以 $SO(3)$ 群是多连通的.

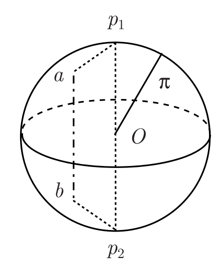


图 4.2　$SO(3)$ 群的参数空间

例 4.3　二维特殊幺正群 $SU(2)$.

设 $A \in SU(2)$, 且

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{4.39}$$

由 $\det A = 1$ 得

$$ad - bc = 1. \tag{4.40}$$

又

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad A^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

由幺正性 $A^{-1} = A^{\dagger}$ 知, $a = d^*$, $b = -c^*$, 则

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

且

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{4.43}$$

设 $a = x + \mathrm{i}y$, $b = z + \mathrm{i}w$, 其中的 x、y、z 与 w 都是实数, 上式变为

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1. \tag{4.44}$$

表明 $SU(2)$ 群的参数空间为由 (4.44) 式确定的四维球面, 则球面上任意两点间的任意两条连接曲线, 可通过连续变形而相互重合, 所以 $SU(2)$ 是单连通李群.

例 4.4　齐次洛伦兹群 L.

由 (4.36) 式知, 齐次洛伦兹群 L 是一不连通李群. 进一步, 变写 (4.35) 式中的

$$\sum_{\mu} A_{\mu\nu}A^{\mu\lambda} = \sum_{\mu\beta\alpha} A_{\mu\nu}g^{\mu\beta}A_{\beta\alpha}g^{\alpha\lambda}, \quad g_{\nu}^{\lambda} = \sum_{\alpha} g_{\nu\alpha}g^{\alpha\lambda}, \tag{4.45}$$

其中 $g_{\nu\alpha} = g^{\nu\alpha}$ 是度规张量 (1.26) 式, 则正交条件 (4.35) 第 1 式变为

$$\sum_{\mu\beta} A_{\mu\nu}g^{\mu\beta}A_{\beta\alpha} = g_{\nu\alpha}, \tag{4.46}$$

由度规张量 (1.26) 式, 完成上式左边的求和得

$$A_{0\nu}A_{0\alpha} - A_{1\nu}A_{1\alpha} - A_{2\nu}A_{2\alpha} - A_{3\nu}A_{3\alpha} = g_{\nu\alpha} = \begin{cases} 0 & (\nu \neq \alpha), \\ 1 & (\nu = \alpha = 0), \\ -1 & (\nu = \alpha = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{4.47}$$

在 (4.47) 式中取 $\nu = \alpha = 0$ 得

$$A_{00}^2 - \sum_{i=1}^{3} A_{i0}^2 = 1, \quad \Rightarrow A_{00}^2 \geqslant 1, \quad \Rightarrow A_{00} \geqslant +1, \text{ 或} A_{00} \leqslant -1, \tag{4.48}$$

表明 L 群的参数空间还可分为 $A_{00} \geqslant +1$ 与 $A_{00} \leqslant -1$ 两叶, 两者也是不连通的. 再考虑到 (4.36) 式的 $\det A = \pm 1$, 齐次洛伦兹群 L 的参数空间可分为如下不连通的四叶:

$$\begin{aligned} &L_{+}^{\uparrow}: \det A = +1,\ A_{00} \geqslant +1,\ I \in L_{+}^{\uparrow}; \\ &L_{-}^{\uparrow}: \det A = -1,\ A_{00} \geqslant +1,\ \sigma \in L_{-}^{\uparrow}; \\ &L_{-}^{\downarrow}: \det A = -1,\ A_{00} \leqslant -1,\ \tau \in L_{-}^{\downarrow}; \\ &L_{+}^{\downarrow}: \det A = +1,\ A_{00} \leqslant -1,\ \rho \in L_{+}^{\downarrow}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

这里用 “+” 与 “−” 号分别代表 $\det A = +1$ 与 -1 的情况; 用 “↑” 与 “↓” 分别代表 $A_{00} \geqslant +1$ 和 $A_{00} \leqslant -1$ 的情况.

$\det A = +1$ 的变换称为固有洛伦兹变换, 它不改变坐标轴的相对指向, 即右手坐标系, 经变换后仍是右手坐标系. $\det A = -1$ 的变换, 将改变坐标轴的相对指向, 即右手坐标系, 经变换后成为左手坐标系.

$A_{00} \geqslant +1$ 的变换称为正时洛伦兹变换. 由于

$$x'_{\mu} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu}x^{\nu}, \quad \Rightarrow x'_0 = A_{00}x^0 + \sum_{i=1}^{3} A_{0i}x^i, \tag{4.50}$$

对于类时空间

$$\begin{aligned} &x^2 = \sum_{\mu} x_{\mu}x^{\mu} = x_0x^0 + \sum_{i=1}^{3} x_ix^i = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 > 0, \\ &\Rightarrow (x^0)^2 > \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2. \end{aligned} \tag{4.51}$$

又由 (4.46) 式知

$$\sum_{\mu\beta} A_{\mu 0} g^{\mu\beta} A_{\beta 0} = 1, \quad \Rightarrow A_{00}A_{00} - \sum_{i=1}^{3} A_{i0}A_{i0} = 1,$$

两边取转置得

$$\begin{aligned}&\tilde{A}_{00}\tilde{A}_{00} - \sum_{i=1}^{3} \tilde{A}_{i0}\tilde{A}_{i0} = 1, \quad \Rightarrow A_{00}^2 - \sum_{i=1}^{3} A_{0i}^2 = 1,\\ &\Rightarrow A_{00}^2 > \sum_{i=1}^{3} A_{0i}^2.\end{aligned} \tag{4.52}$$

(4.51) 与 (4.52) 两式表明

$$(A_{00}x^0)^2 > \sum_{i=1}^{3} (A_{0i}x^i)^2. \tag{4.53}$$

所以 (4.50) 式中左边 x_0' 的符号取决于 $A_{00}x^0$. 若 $A_{00} \geqslant +1$, 则 x_0' 与 x_0 同号, 即正时洛伦兹变换不改变类时空间时间分量的符号; 反之, 若 $A_{00} \leqslant -1$, 则 x_0' 与 x_0 异号, 类时空间的时间分量将变号.

例 4.5　正时固有洛伦兹群 $L_p = L_+^{\uparrow}$、固有洛伦兹群 L_+ 与正时洛伦兹群 $L^{\uparrow}$.

(1) 正时固有洛伦兹群 $L_p = L_+^{\uparrow}$.

$L_+^{\uparrow}$ 是 (4.49) 式中唯一含有单位元 I 的一叶, 只有它才构成群, 称为正时固有洛伦兹群, 是 L 的正规子群, 有陪集

$$\sigma L_p = L_-^{\uparrow},\ \tau L_p = L_-^{\downarrow},\ \rho L_p = L_+^{\downarrow}. \tag{4.54}$$

这样

$$L = \{L_p, \sigma L_p, \tau L_p, \rho L_p\} = \left\{L_+^{\uparrow}, L_-^{\uparrow}, L_-^{\downarrow}, L_+^{\downarrow}\right\}, \tag{4.55}$$

亦即商群 L/L_p 是一四阶群, 与群 $V = \{I, \sigma, \tau, \rho\}$ 同构. 由于对于任意的 $A \in L_p$, $\det A = +1$, $A_{00} \geqslant +1$, 所以在 L_p 的变换下, 类时空间的时间与空间都无反演, 且坐标系的右手关系保持不变. 显然, $SO(3) \subset L_p$, 即三维旋转群 $SO(3)$ 是正时固有洛伦兹群 L_p 的子群.

(2) 固有洛伦兹群 $L_+ = L_+^{\uparrow} \cup L_+^{\downarrow}$.

对于任意的 $A \in L_+$, $\det A = +1$, 所以在 L_+ 的变换下, 闵可夫斯基四维空间中的坐标系保持右手关系不变.

(3) 正时洛伦兹群 $L^{\uparrow} = L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\uparrow}$.

正时洛伦兹群也称为完全洛伦兹群. 对于任意的 $A \in L^{\uparrow}$, 其矩阵元 $A_{00} \geqslant +1$, 所以在 $L^{\uparrow}$ 的变换下, 类时空间的时间分量不变号.

例 4.6 狭义洛伦兹群 L_s.

在狭义相对论中, 两个沿 x 轴做相对匀速运动的惯性系间的洛伦兹变换为

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} A^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{4.56}$$

其中, 混合张量

$$A^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.57}$$

$\beta = v/c, \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, v 为两惯性系间的相对运动速度, c 为光速, 在自然单位制中, $c = 1$. 上述变换的全体也构成一群, 这里称为狭义洛伦兹群, 记作 L_s. 注意到

$$\sum_{\mu\beta} A^{\mu}_{\nu} g_{\mu\beta} A^{\beta}_{\alpha} = g_{\nu\alpha},$$

即变换 (4.57) 式满足正交条件 (4.46) 式, 且 $\det(A^{\mu}_{\nu}) = +1, A^0_0 = \gamma \geqslant +1$, 所以 $L_s \subset L_p$, 即狭义洛伦兹群 L_s 是正时固有洛伦兹群 L_p 的子群, 代表的是 (x^0, x^1) 二维空间中的转动变换群.

这里想再一提的是, 变换 (4.56) 式亦可变写成

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} A^{\mu\nu} x_{\nu}, \quad \text{或} \quad x'_{\mu} = \sum_{\nu} A_{\mu\nu} x^{\nu}, \tag{4.58}$$

其中, 二阶逆变与协变张量

$$A^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} A^{\mu}_{\alpha} g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.59}$$

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

由 (4.59) 与 (4.60) 两式知

$$\sum_{\mu} A_{\mu\nu} A^{\mu\lambda} = g_{\nu}^{\lambda},$$

即满足正交关系 (4.35) 式, 因此 (4.58) 式的变换是齐次洛伦兹变换. 又 $\det(A_{\mu\nu}) = \det(A^{\mu\nu}) = -1$, $A^{00} = A_{00} = \gamma \geqslant +1$, 所以 $A_{\mu\nu}$ 或 $A^{\mu\nu} \in L_{-}^{\uparrow}$, 即与混合张量 A_{ν}^{μ} 不同, $A_{\mu\nu}$ 或 $A^{\mu\nu}$ 的全体不构成群.

4.2.2　李群的紧致性

若李群的参数空间是闭且有界的, 则称它为紧致李群 (compact Lie group). 对于矩阵李群 G, 若是紧致的, 则意味着对于任意的 $A \in G$, 存在着常数 k, 使得矩阵元

$$|A_{\mu\nu}| \leqslant k. \tag{4.61}$$

李群的紧致性是一个很重要的特点, 在李群的表示论中有着重要的应用.

例 4.7　$O(l)$ 是紧致李群.

由 (4.24) 式知, 对于任意的 $A \in O(l)$, 其矩阵元满足关系

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha\mu} A_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu、\nu、\alpha = 1, 2, \cdots, l).$$

取 $\mu = \nu$ 得

$$\sum_{\alpha} (A_{\alpha\mu})^2 = 1 \quad (\mu、\alpha = 1, 2, \cdots, l),$$

这样

$$|A_{\alpha\mu}| \leqslant 1 \quad (\mu、\alpha = 1, 2, \cdots, l), \tag{4.62}$$

满足条件 (4.61) 式, $O(l)$ 是紧致李群, 同样 $SO(l)$ 也是紧致李群.

例 4.8　$U(l)$ 是紧致李群.

由 (4.13b) 式知, 对于 $A \in U(l)$, 其矩阵元满足关系

$$\sum_{\alpha} A_{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}^{\dagger} = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu、\nu、\alpha = 1, 2, \cdots, l). \tag{4.63}$$

取 $\mu = \nu$, 上式变为

$$\sum_{\alpha} A_{\mu\alpha} A_{\alpha\mu}^{\dagger} = 1, \quad \Rightarrow \sum_{\alpha} A_{\mu\alpha} A_{\mu\alpha}^{*} = 1, \quad \Rightarrow \sum_{\alpha} |A_{\mu\alpha}|^2 = 1 \quad (\mu、\alpha = 1, 2, \cdots, l), \tag{4.64}$$

这样

$$|A_{\mu\alpha}| \leqslant 1 \quad (\mu、\alpha = 1, 2, \cdots, l), \tag{4.65}$$

满足 (4.61) 式, $U(l)$ 是紧致李群, 同样 $SU(l)$ 群也是紧致李群.

例 4.9 齐次洛伦兹群 L 是非紧致李群.

这一点由 (4.48) 式可明确地看出, 群元素 $A \in L$ 的矩阵元满足条件 $A_{00} \geqslant +1$ 或 $A_{00} \leqslant -1$, 不是有界的, 所以 L 是一非紧致李群.

显然 $GL(l,C)$、$GL(l,C)$ 或 $SL(l,C)$、$SL(l,R)$ 等群都是非紧致的, 因为这些群对群参数的取值范围没有要求.

4.3 李群的无穷小生成元

设 A 为李群 G 在单位元附近一个邻域内的群元素, 则由群的封闭性知, 连通李群 G 总可以表示成集合

$$G = \{A^n, n = 1, 2, \cdots\}, \tag{4.66}$$

也就是说连通李群可由单位元附近的群元素产生. 这样, 为了得到连通李群 G, 只要求得其单位元附近的一个任意小的邻域内的群元素就够了.

4.3.1 李群的无穷小生成元

为了确定李群在单位元附近的群元素, 将 $A(\alpha) \in G$ 在单位元 I(单位矩阵) 附近作级数展开, 得

$$A(\alpha) = I + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k + \cdots, \tag{4.67}$$

其中 $\alpha_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ 是无穷小群参数. 与前面一样, 这里假设共有 m 个独立群参数, 即李群 G 是 m 阶的. (4.67) 式中的展开系数

$$X_k = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=0} \quad (k = 1, 2, \cdots, m), \tag{4.68}$$

称为连通李群 G 的无穷小生成元 (infinitesimal generator), 或简称为李群的生成元, 对于 m 阶李群, 共有 m 个线性无关的生成元. 下面举几个例子.

例 4.10 $SO(2)$ 群的生成元.

$SO(2)$ 群描述的是二维空间的纯转动, 有

$$\frac{1}{2} l(l-1) \xlongequal{l=2} 1$$

个参数. 假设转动是在 xOy 平面内绕 z 轴进行的, 转角 (参数) 为 α, 如图 4.3 所示.

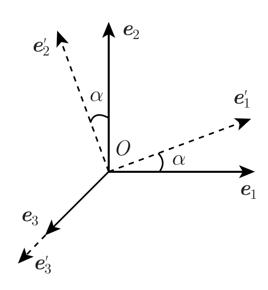


图 4.3　绕 z 轴转角为 α 的转动

(注：按惯例, 为表述上的方便, 坐标轴 x、y、z 有时分别用数字 1、2、3 代替, 全文同). 由 (2.5) 式知, 变换矩阵的矩阵元为

$$A_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}'_\nu) = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu, \tag{4.69}$$

由此可得 $SO(2)$ 群的群元素

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

其中的 α 取值 $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$, 单位元是 $A(0)$, 生成元为

$$X = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.71}$$

或写成

$$X_\alpha = \mathrm{i}X = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.72}$$

在 $\alpha \Rightarrow 0$ 时, (4.70) 式变为

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = I + \alpha X = I - \mathrm{i}\alpha X_\alpha, \tag{4.73}$$

与一般形式的 (4.67) 式相一致.

若再考虑到不转动的 z 或第 3 轴, 变换矩阵为

$$A_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.74}$$

与之相应的生成元为

$$X_3 = \left.\frac{\partial A_3(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.75}$$

或

$$L_3 = \mathrm{i}X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.76}$$

则 L_3 即为轨道角动量算符的 z 或第 3 分量.

例 4.11 $SU(2)$ 群的生成元.

设 $A \in SU(2)$, 有

$$l^2 - 1 \overset{l=2}{=\!=} 3$$

个独立参数. 单位元附近的群元素可表示成

$$A(\alpha) = I + \varepsilon(\alpha), \tag{4.77}$$

其中 ε 为一小量. 由幺正条件 $A(\alpha)A^{\dagger}(\alpha) = I$, 得

$$\varepsilon(\alpha) + \varepsilon^{\dagger}(\alpha) = 0, \tag{4.78}$$

即 ε 是反厄米的, 令 $\varepsilon(\alpha) = \mathrm{i}\Lambda(\alpha)$, 其中 Λ 是厄米矩阵, 则

$$A(\alpha) = I + \mathrm{i}\Lambda(\alpha). \tag{4.79}$$

由幺模条件 $\det A = 1$, 得

$$\det A = 1 + \mathrm{i}\sum_{\rho} \Lambda_{\rho\rho} + \underbrace{\cdots}_{\text{高阶小量}} = 1, \tag{4.80}$$

则

$$\mathrm{Tr}\Lambda = 0, \tag{4.81}$$

即 Λ 是无迹的, 通常写成如下形式:

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2 \\ -\alpha_1 - \mathrm{i}\alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{4.82}$$

其中 α_1、α_2 与 α_3 为三个无穷小群参数, 则

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\alpha_3 & -\mathrm{i}\alpha_1 - \alpha_2 \\ -\mathrm{i}\alpha_1 + \alpha_2 & 1 + \mathrm{i}\alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{4.83}$$

由此可得 $SU(2)$ 群的生成元

$$X_1 = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\sigma_1, \tag{4.84a}$$

$$X_2 = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\sigma_2, \tag{4.84b}$$

$$X_3 = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\sigma_3, \tag{4.84c}$$

$\sigma_k(k=1,2,3)$ 为泡利矩阵, 满足对易关系

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (i、j、k=1,2,3), \tag{4.85}$$

其中 ε_{ijk} 为莱维–齐维塔 (Levi-Civita) 符号, 是一完全反对称张量, 且 $\varepsilon_{123}=1$. 若记

$$s_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (i=1,2,3), \tag{4.86}$$

则 s_i 满足对易关系

$$[s_i, s_j] = \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}s_k \quad (i、j、k=1,2,3). \tag{4.87}$$

采用生成元, (4.83) 式可变写成

$$A(\alpha) = I + \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\alpha_3 & -\mathrm{i}\alpha_1 - \alpha_2 \\ -\mathrm{i}\alpha_1 + \alpha_2 & \mathrm{i}\alpha_3 \end{pmatrix} = I + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i X_i = I - \mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\sigma_i, \tag{4.88}$$

与 (4.67) 式相一致.

例 4.12　$SO(3)$ 群的生成元.

$SO(3)$ 群有

$$\frac{1}{2}l(l-1) \xlongequal{l=3} 3$$

个独立参数, 描述的是三维空间的纯转动. 这里假设转动按如下方法进行:

先绕 x 轴转 α_1 角, 如图 4.4 所示.

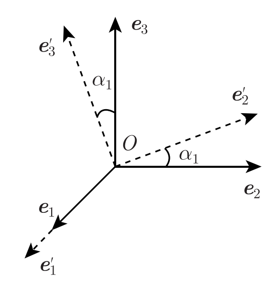


图 4.4　绕 x 轴转角为 α_1 的转动

按 (4.69) 式, 得变换矩阵

$$A_1(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \tag{4.89}$$

该转动使矢量 $\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{r}'$, 矩阵形式 (注: 矢量的矩阵形式为简单的斜体, 全文同) 为

$$r' = A_1(\alpha_1)r. \tag{4.90}$$

再绕 y 轴转 α_2 角, 如图 4.5 所示.

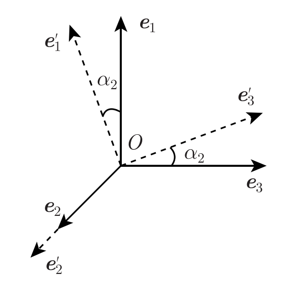


图 4.5 绕 y 轴转角为 α_2 的转动

由 (4.69) 式得

$$A_2(\alpha_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{4.91}$$

在该转动变换下, 矢量 $\boldsymbol{r}' \Rightarrow \boldsymbol{r}''$, 即

$$r'' = A_2(\alpha_2)r' = A_2(\alpha_2)A_1(\alpha_1)r. \tag{4.92}$$

最后再绕 z 轴转 α_3 角, 参见图 4.3. 由 (4.69) 式得

$$A_3(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.93}$$

该转动使矢量 $\boldsymbol{r}'' \Rightarrow \boldsymbol{r}'''$, 即

$$r''' = A_3(\alpha_3)r'' = A_3(\alpha_3)A_2(\alpha_2)A_1(\alpha_1)r = A(\alpha)r. \tag{4.94}$$

其中

$A(\alpha) = A_3(\alpha_3)A_2(\alpha_2)A_1(\alpha_1)$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix},$$

完成矩阵相乘得

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2\cos\alpha_3 & \begin{matrix} -\cos\alpha_1\sin\alpha_3 \\ +\ \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 \end{matrix} & \begin{matrix} \sin\alpha_1\sin\alpha_3 \\ +\ \cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 \end{matrix} \\ \cos\alpha_2\sin\alpha_3 & \begin{matrix} \cos\alpha_1\cos\alpha_3 \\ +\ \sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 \end{matrix} & \begin{matrix} -\sin\alpha_1\cos\alpha_3 \\ +\ \cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 \end{matrix} \\ -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1\cos\alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{4.95}$$

这就是绕 x、y 与 z 三坐标轴转角分别为 α_1、α_2 与 α_3 时的 $SO(3)$ 群的群元素表达式, 三参数通常分别取值

$$-\pi \leqslant \alpha_1,\ \alpha_2 < \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_3 < \frac{\pi}{2}, \tag{4.96}$$

在 $A(\alpha)$ 的变换下, 矢量 $\boldsymbol{r} \Rightarrow \boldsymbol{r}'''$. 该变换的特点是三个转角都是绕着原来旧的坐标轴进行的, 且单位元在零参数处, 即 $A(0) = I$. 与各群参数对应的生成元为

$$X_1 = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}L_1, \tag{4.97a}$$

$$X_2 = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}L_2, \tag{4.97b}$$

$$X_3 = \left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}L_3. \tag{4.97c}$$

其中 $L_i (i = 1, 2, 3)$ 为轨道角动量算符, 满足对易关系

$$[L_i, L_j] = \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk} L_k \quad (i、j、k = 1, 2, 3). \tag{4.98}$$

在 α_1、α_2、$\alpha_3 \Rightarrow 0$ 时, (4.95) 式变为

$$A(\alpha) = I + \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = I + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i X_i = I - \mathrm{i}\sum_{i=1}^{3} \alpha_i L_i, \tag{4.99}$$

回到了 (4.67) 式的一般形式.

例 4.13 $SU(3)$ 群的生成元.

$SU(3)$ 满足与 $SU(2)$ 群相同的条件, 所以与讨论 $SU(2)$ 群的 (4.79) 式一样, 对于 $A(\alpha)\in SU(3)$, 单位元附近的群元素可写成

$$A(\alpha)=I+\mathrm{i}\varLambda(\alpha), \tag{4.100}$$

其中 $\varLambda$ 是一无迹厄米矩阵, 且是一个无穷小量, 考虑到 $SU(3)$ 由

$$l^2-1\overset{l=3}{=\!=}8$$

个独立参数描述, $\varLambda$ 通常取形式

$$\varLambda(\alpha)=\begin{pmatrix}-\alpha_3-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & -\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2 & -\alpha_4+\mathrm{i}\alpha_5\\ -\alpha_1-\mathrm{i}\alpha_2 & \alpha_3-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8 & -\alpha_6+\mathrm{i}\alpha_7\\ -\alpha_4-\mathrm{i}\alpha_5 & -\alpha_6-\mathrm{i}\alpha_7 & \dfrac{2}{\sqrt{3}}\alpha_8\end{pmatrix}, \tag{4.101}$$

其中 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,8)$ 为八个无穷小群参数, 与之相应的生成元为

$$X_k=\left.\frac{\partial A(\alpha)}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=0}=-\mathrm{i}\lambda_k\quad(k=1,2,\cdots,8), \tag{4.102}$$

由 (4.100)~(4.102) 式得

$$\begin{gathered}\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\\ \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\\ \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\ \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{4.103}$$

上述八个无迹厄米矩阵通常称为盖尔曼 (Gell-Mann) 矩阵, 它们满足对易关系

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2\mathrm{i}\sum_k f_{ijk}\lambda_k \quad (i、j、k = 1, 2, \cdots, 8), \tag{4.104}$$

其中, f_{ijk} 是完全反对称张量, 不为零的有

$$\begin{aligned} &f_{123} = 1, \\ &f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \\ &f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \tag{4.105}$$

采用生成元, (4.100) 式可改写为

$$A(\alpha) = I + \sum_{i=1}^{8} \alpha_i X_i = I - \mathrm{i}\sum_{i=1}^{8} \alpha_i \lambda_i, \tag{4.106}$$

与一般形式的 (4.67) 式相一致.

4.3.2　有限群元素的生成

如本节开始所述, 连通李群 G 可由单位元附近的群元素生成. 上面讨论了连通李群在单位元附近的级数展开, 得到了用生成元 X_k 表示的单位元附近的群元素

$$A(\alpha) = I + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_k + \cdots,$$

其中 α_k 是群参数, 为任意小量. 这样, 只要知道了生成元 X_k, 就得到了 $A(\alpha)$, 再将其代入 (4.66) 式, 即

$$G = \{A^n, n = 1, 2, \cdots\},$$

就可得到李群 G, 且只要上式中的 n 取得足够大, 就可以得到有限群参数的群元素, 亦即生成了有限群元素, 这就是将 X_k 称为生成元的原因.

例 4.14　$SO(2)$ 群的生成元由 (4.71) 或 (4.72) 式给出, 为

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}X_\alpha,\ X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

则群元素 $A \in SO(2)$ 在单位元附近的级数展开如 (4.73) 式, 为

$$A(\delta\alpha) = I + \delta\alpha X = I - \mathrm{i}\frac{\alpha}{n}X_\alpha,$$

其中, $\delta\alpha$ 是一个无穷小量, n 是一个无穷大量, α 是一个有限量, 它是连续转动 n 次、每次转角各为 $\delta\alpha$ 后的总转角. 则 n 次转动后的群元素为

$$A(\alpha)=[A(\delta\alpha)]^n=(I-\mathrm{i}\frac{\alpha}{n}X_\alpha)^n, \tag{4.107}$$

在 n 取极限 $n\to\infty$ 时, 得

$$A(\alpha)=\exp(-\mathrm{i}\alpha X_\alpha). \tag{4.108}$$

进一步将上式作级数展开, 并注意到 $X_\alpha^2=I$, 得

$$\begin{aligned}A(\alpha)=\exp(-\mathrm{i}\alpha X_\alpha)&=1-\mathrm{i}\alpha X_\alpha-\frac{1}{2!}\alpha^2+\frac{1}{3!}\mathrm{i}\alpha^3X_\alpha+\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{2!}\alpha^2+\frac{1}{4!}\alpha^4-\cdots\right)-\mathrm{i}X_\alpha\left(\alpha-\frac{1}{3!}\alpha^3+\frac{1}{5!}\alpha^5-\cdots\right)\\&=\cos\alpha-\mathrm{i}X_\alpha\sin\alpha,\end{aligned} \tag{4.109}$$

亦即

$$A(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

这正是 $SO(2)$ 群的群元素 (4.70) 式. 所以生成元 X_α 或单位元附近的群元素生成了有限群元素 $A(\alpha)\in SO(2)$.

(4.108) 式表明, 有限群元素与生成元之间成指数关系, 对于有 m 个生成元的连通李群, 这种关系可一般性地推广为

$$A(\alpha)=\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^m\alpha_iX_i\right), \tag{4.110}$$

其中 X_i 是与参数 α_i 相应的生成元, 通常将满足上述关系的群参数称为正则群参数. 一般来说, 若群元素的单位元仅处在零参数处, 即

$$A(0)=I, \tag{4.111}$$

则这样的群参数都是正则群参数. 如前面求得的 $SO(2)$、$SU(2)$、$SO(3)$ 及 $SU(3)$ 群的群元素 (4.73)、(4.88)、(4.99) 及 (4.106) 式, 其单位元都在零参数处, 所以与之相应的群参数都是正则的, 这样各群的有限群元素与相应的生成元之间都有如 (4.110) 式所示的指数关系, 即

$$\begin{aligned}SU(2)\text{群}:A(\alpha)&=\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^3\alpha_i\sigma_i\right),\\SO(3)\text{群}:A(\alpha)&=\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^3\alpha_iL_i\right),\\SU(3)\text{群}:A(\alpha)&=\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^8\alpha_i\lambda_i\right),\end{aligned} \tag{4.112}$$

其中各群参数 $\alpha_i(i=1,2,3)$ 或 $(i=1,2,\cdots,8)$ 都是有限量, 生成元 σ_i、$L_i(i=1,2,3)$ 分别为如 (4.84) 与 (4.97) 式所示的泡利矩阵与轨道角动量算符, $\lambda_i(i=1,2,\cdots,8)$ 是如 (4.103) 式所示的盖尔曼矩阵.

(4.112) 式中 $SO(3)$ 群指数形式的群元素, 其矩阵形式就是 (4.95) 式. 由于 (4.112) 式中的生成元是不对易的, 所以在由指数形式变到矩阵形式时, 需预先规定它们的次序. 对于 $SO(3)$ 群, 由各角的转动次序知

$$A(\alpha)=\exp(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}\alpha_iL_i)\Rightarrow\exp(-\mathrm{i}\alpha_3L_3)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2L_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_1L_1), \tag{4.113}$$

由与 (4.109) 式同样的讨论知

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha_3L_3)=I_3^1+I_3^2\cos\alpha_3-\mathrm{i}L_3\sin\alpha_3, \tag{4.114}$$

其中

$$I_3^1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ I_3^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ L_3=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{4.115}$$

(注：上式中, 字母 I 右上角的 1 与 2 都是角标, 下同) 这样

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha_3L_3)=\begin{pmatrix}\cos\alpha_3&-\sin\alpha_3&0\\\sin\alpha_3&\cos\alpha_3&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{4.116}$$

同样

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha_2L_2)=I_2^1+I_2^2\cos\alpha_2-\mathrm{i}L_2\sin\alpha_2, \tag{4.117}$$

其中

$$I_2^1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ I_2^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ L_2=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}, \tag{4.118}$$

则

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha_2L_2)=\begin{pmatrix}\cos\alpha_2&0&\sin\alpha_2\\0&1&0\\-\sin\alpha_2&0&\cos\alpha_2\end{pmatrix}. \tag{4.119}$$

再者

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha_1L_1)=I_1^1+I_1^2\cos\alpha_1-\mathrm{i}L_1\sin\alpha_1, \tag{4.120}$$

其中

$$I_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.121}$$

则

$$\exp(-\mathrm{i}\alpha_1 L_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \tag{4.122}$$

将 (4.116)、(4.119) 与 (4.122) 三式代入 (4.113) 式, 即得 (4.95) 式.

对于 $A(\alpha) \in SU(2)$, 若规定各生成元的次序与上面 $SO(3)$ 群的相同, 即

$$A(\alpha) = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\sigma_i\right) \Rightarrow \exp(-\mathrm{i}\alpha_3\sigma_3)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2\sigma_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_1\sigma_1), \tag{4.123}$$

则与 (4.109) 式同样的推导可得

$$\begin{aligned} &A(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \mathrm{i}\sin\alpha_1\sin\alpha_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_3} & -(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \mathrm{i}\sin\alpha_1\cos\alpha_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_3} \\ (\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \mathrm{i}\sin\alpha_1\cos\alpha_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3} & (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \mathrm{i}\sin\alpha_1\sin\alpha_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.124}$$

其中 α_1、α_2 与 α_3 通常取值

$$-\pi \leqslant \alpha_1,\ \alpha_2 < \pi,\ 0 \leqslant \alpha_3 \leqslant \pi. \tag{4.125}$$

(4.124) 式显然满足

$$\det A(\alpha) = 1, \quad A(\alpha)A(\alpha)^\dagger = 1, \tag{4.126}$$

且在 α_1、α_2、$\alpha_3 \Rightarrow 0$ 时, (4.124) 式变为

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\alpha_3 & -\mathrm{i}\alpha_1 - \alpha_2 \\ -\mathrm{i}\alpha_1 + \alpha_2 & 1 + \mathrm{i}\alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{4.127}$$

与 (4.83) 式相一致.

4.3.3 李群的结构常数

由上面的讨论知, 单位元附近的群元素为

$$A(\alpha) = I + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i X_i + O(\alpha^2), \tag{4.128}$$

$A(\alpha)$ 的逆为

$$A(\alpha)^{-1} = A(-\alpha) = I - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i + O(\alpha^2), \tag{4.129}$$

显然

$$A(\alpha)A(\alpha)^{-1} = I + O(\alpha^2). \tag{4.130}$$

再考察乘积

$$\begin{aligned}
&A(\beta)^{-1}A(\alpha)^{-1}A(\beta)A(\alpha) \\
&= \left(I - \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i\right)\left(I - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X_j\right)\left(I + \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i\right)\left(I + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X_j\right) \\
&= \left(I - \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i\right)\left(I - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X_j\right)\left(I + \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X_j + \sum_{ij=1}^{m} \beta_i \alpha_j X_i X_j\right) \\
&\underline{\underline{\text{略去}\alpha^2\text{项}}} \left(I - \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i\right)\left[I + \sum_{ij=1}^{m} \beta_i \alpha_j \left(X_i X_j - X_j X_i\right) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i\right] \\
&\underline{\underline{\text{略去}\beta^2\text{项}}} I + \sum_{ij=1}^{m} \beta_i \alpha_i [X_i, X_j],
\end{aligned}$$

由于群的封闭性, $A(\beta)^{-1}A(\alpha)^{-1}A(\beta)A(\alpha)$ 也是群的一元素, 故

$$A(\beta)^{-1}A(\alpha)^{-1}A(\beta)A(\alpha) = I + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k X_k,$$

这样

$$\sum_{ij=1}^{m} \beta_i \alpha_j \left[X_i, X_j\right] = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k X_k,$$

表明生成元间满足对易关系

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{m} C_{ij}^k X_k, \tag{4.131}$$

参数间满足关系

$$\gamma_k = \sum_{ij=1}^{m} C_{ij}^k \beta_i \alpha_j. \tag{4.132}$$

(4.131) 式表明, 李群两生成元间的对易关系可由 m 个生成元的线性组合给出, C_{ij}^k 称为李群的结构常数 (structure constant), 它由生成元的对易关系确定. 例如, 由 (4.87)、(4.98) 及 (4.104) 三式知, $SU(2)$、$SO(3)$ 及 $SU(3)$ 群的结构常数分别为

ε_{ijk}、ε_{ijk} 及 f_{ijk}(注：对易关系中的虚数因子 i 与常数可通过适当选择生成元消除掉). 显然, 对于阿贝尔李群, 结构常数 $C_{ij}^k = 0$.

李群的结构常数具有如下两方面性质：

(1) C_{ij}^k 关于下角标是反对称的, 即

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \tag{4.133}$$

这一点由 (4.131) 式可清楚地看出.

(2) 结构常数满足下列等式

$$\sum_{p=1}^{m} C_{ij}^p C_{pk}^q + C_{jk}^p C_{pi}^q + C_{ki}^p C_{pj}^q = 0. \tag{4.134}$$

因为由雅可比 (Jacobi) 恒等式知

$$[[X_i, X_j], X_k] \ + \ [[X_j, X_k], X_i] \ + \ [[X_k, X_i], X_j] = 0, \tag{4.135}$$

又

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j] &= \sum_{p=1}^{m} C_{ij}^p X_p, \\
[[X_i, X_j], X_k] &= \sum_{p=1}^{m} C_{ij}^p [X_p, X_k] = \sum_{pq=1}^{m} C_{ij}^p C_{pk}^q X_q,
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
[[X_j, X_k], X_i] &= \sum_{pq=1}^{m} C_{jk}^p C_{pi}^q X_q, \\
[[X_k, X_i], X_j] &= \sum_{pq=1}^{m} C_{ki}^p C_{pj}^q X_q.
\end{aligned}$$

将各对易子代入 (4.135) 式得

$$\sum_{pq=1}^{m} (C_{ij}^p C_{pk}^q + C_{jk}^p C_{pi}^q + C_{ki}^p C_{pj}^q) X_q = 0,$$

由于 X_q 是任意的, 所以

$$\sum_{p=1}^{m} C_{ij}^p C_{pk}^q + C_{jk}^p C_{pi}^q + C_{ki}^p C_{pj}^q = 0, \quad \Rightarrow (4.134)\text{式得证}.$$

4.4　李群的无穷小算符

设有李群 G, 由 m 个独立群参数 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 描述. l 维线性空间 L_l 中的矢量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_l)$ 在 $A(\alpha)\in G$ 的变换下变为

$$x'=A(\alpha)x, \tag{4.136a}$$

或写成分量形式

$$x'_\mu=\sum_{\nu=1}^{l}A_{\mu\nu}(\alpha)x_\nu=f_\mu(x,\alpha). \tag{4.136b}$$

在坐标作 (4.136) 式的变换时, L_l 空间中的任一函数亦作变换

$$\psi'(x')=\hat{P}(A)\psi(x'), \tag{4.137}$$

其中 $\hat{P}(A)$ 是相应于坐标变换时的函数变换算符. 由于空间任一点的函数值在坐标变换时保持不变, 所以

$$\hat{P}(A)\psi(x')=\psi(x)=\psi(A^{-1}x'),$$

略去撇号得

$$\hat{P}(A)\psi(x)=\psi(A^{-1}x)=\psi\left[f(x,\bar{\alpha})\right], \tag{4.138}$$

其中 $\bar{\alpha}$ 是逆变换 $A^{-1}(\alpha)$ 的群参数, 即 $A^{-1}(\alpha)=A(\bar{\alpha})$. 对于无穷小变换, 参数 α_k 为无穷小量, 此时 $\bar{\alpha}_k=-\alpha_k$[参见 (4.129) 式]. 将 $\hat{P}_A\psi(x)$ 在 $\bar{\alpha}=0$ 处作级数展开, 并保留至一级小量得

$$\begin{aligned}\hat{P}(A)\psi(x)&=\psi\left[f(x,\bar{\alpha})\right]\big|_{\bar{\alpha}\,=\,0}+\sum_{k=1}^{m}\bar{\alpha}_k\,\frac{\partial\psi\left[f(x,\bar{\alpha})\right]}{\partial\bar{\alpha}_k}\bigg|_{\bar{\alpha}\,=\,0}\\&=\psi(x)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\sum_{\mu=1}^{l}\frac{\partial\psi\left[f(x,\bar{\alpha})\right]}{\partial f_\mu(x,\bar{\alpha})}\frac{\partial f_\mu(x,\bar{\alpha})}{\partial\bar{\alpha}_k}\bigg|_{\bar{\alpha}\,=\,0}\\&\xlongequal{f_\mu(x,\bar{\alpha})|_{\bar{\alpha}=0}=x_\mu}\psi(x)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\sum_{\mu=1}^{l}\frac{\partial f_\mu(x,\alpha)}{\partial\alpha_k}\bigg|_{\alpha=0}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu},\end{aligned} \tag{4.139}$$

引入 m 个算符

$$\hat{X}_k=-\sum_{\mu=1}^{l}\frac{\partial f_\mu(x,\alpha)}{\partial\alpha_k}\bigg|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

或按照 (4.136b) 式

$$\hat{X}_k = -\sum_{\mu=1}^{l} \frac{\partial x'_\mu}{\partial \alpha_k}\bigg|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (k=1,2,\cdots,m), \tag{4.140}$$

则由 (4.139) 式知

$$\hat{P}(A) = 1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \hat{X}_k, \tag{4.141a}$$

或作变换

$$\hat{X}_k \Rightarrow -\mathrm{i}\hat{X}_k, \quad \Rightarrow \hat{P}(A) = 1 - \mathrm{i}\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \hat{X}_k. \tag{4.141b}$$

(4.140) 式定义的算符 $\hat{X}_k(1,2,\cdots,m)$ 称为李群的无穷小算符 (infinitesimal operator), 其数目等于李群独立参数的个数. 可以证明, 它们满足与无穷小生成元同样的对易关系, 即

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = \sum_{k=1}^{m} C_{ij}^k \hat{X}_k, \tag{4.142}$$

其中 C_{ij}^k 即为李群的结构常数. 所以从代数运算的角度来看, 无穷小生成元与无穷小算符并没有什么区别, 只是它们的作用对象不同, 因此其形式亦不一样. 无穷小生成元作用在矢量上, 是对矢量的旋转, 取矩阵形式. 而无穷小算符作用在函数上, 是对函数的旋转, 取算符形式.

(4.141) 式仅是在无穷小变换下, 即 $\alpha_k \Rightarrow 0$ 时的函数变换算符. 对于有限变换, 在群参数都取正则群参数的情况下, 与有限群元素的 (4.110) 式相类似, 有限函数变换算符为

$$\hat{P}(A) = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \hat{X}_k\right). \tag{4.143}$$

按定义 (4.140) 式与变换 (4.141b) 式, 上式中的 m 个无穷小算符 $\hat{X}_k(1,2,\cdots,m)$ 都是厄米的, 所以 (4.143) 式的函数变换算符 $\hat{P}(A)$ 是一幺正算符, 即 $\hat{P}^\dagger(A) = \hat{P}^{-1}(A)$.

例 4.15 $SO(2)$ 群的无穷小算符.

如例 4.10 所述, $SO(2)$ 群只有一个群参数 α, 其群元素由 (4.70) 式给出, 为

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

在 $A(\alpha)$ 的变换下, 其坐标变为

$$x'_1 = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, \quad x'_2 = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha, \tag{4.144}$$

则按 (4.140) 式得无穷小算符

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= -\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&= -\mathrm{i}\hat{L}_3,
\end{aligned}
\tag{4.145}
$$

为轨道角动量算符的第 3 分量.

例 4.16　$SU(2)$ 群的无穷小算符.

$SU(2)$ 群有三个独立参数, 在无穷小变换下, 群元素为 (4.83) 式, 即

$$
A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i}\alpha_3 & -\mathrm{i}\alpha_1 - \alpha_2 \\ -\mathrm{i}\alpha_1 + \alpha_2 & 1+\mathrm{i}\alpha_3 \end{pmatrix},
$$

在该变换下, 坐标变换为

$$
\begin{aligned}
x_1' &= (1-\mathrm{i}\alpha_3)x_1 - (\mathrm{i}\alpha_1 + \alpha_2)x_2, \\
x_2' &= (-\mathrm{i}\alpha_1 + \alpha_2)x_1 + (1+\mathrm{i}\alpha_3)x_2.
\end{aligned}
\tag{4.146}
$$

则由 (4.140) 式得各无穷小算符

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_1 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\mathrm{i}\hat{\sigma}_1,
\end{aligned}
\tag{4.147a}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_2 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} = -\mathrm{i}\hat{\sigma}_2,
\end{aligned}
\tag{4.147b}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_3 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\mathrm{i}\hat{\sigma}_3,
\end{aligned}
\tag{4.147c}
$$

三者满足对易关系

$$
[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2\mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \quad (i、j、k = 1,2,3),
\tag{4.148}
$$

与 $SU(2)$ 群生成元的对易关系 (4.85) 式相一致. 若记

$$
\hat{s}_i = \frac{\hat{\sigma}_i}{2} \quad (i = 1,2,3),
\tag{4.149}
$$

则 $\hat{s}_i$ 满足对易关系

$$[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}\hat{s}_k \quad (i、j、k = 1, 2, 3), \tag{4.150}$$

与 (4.87) 式相一致.

例 4.17 $SO(3)$ 群的无穷小算符.

$SO(3)$ 群有三个独立群参数, 其变换矩阵由 (4.95) 式给出. 在该变换下, 坐标变换为

$$\begin{aligned} x_1' =& x_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + x_2(-\cos\alpha_1\sin\alpha_3 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3) \\ &+ x_3(\sin\alpha_1\sin\alpha_3 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3), \end{aligned} \tag{4.151a}$$

$$\begin{aligned} x_2' =& x_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3 + x_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3) \\ &+ x_3(-\sin\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3), \end{aligned} \tag{4.151b}$$

$$x_3' = -x_1\sin\alpha_2 + x_2\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + x_3\cos\alpha_1\cos\alpha_2. \tag{4.151c}$$

则各无穷小算符分别为

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ &= x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} = -\mathrm{i}\hat{L}_1, \end{aligned} \tag{4.152a}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_2 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial\alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial\alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial\alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ &= x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1} = -\mathrm{i}\hat{L}_2, \end{aligned} \tag{4.152b}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_3 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial\alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial\alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial\alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} = -\mathrm{i}\hat{L}_3. \end{aligned} \tag{4.152c}$$

表明各无穷小算符都是轨道角动量算符, 满足对易关系

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad (i、j、k = 1, 2, 3), \tag{4.153}$$

与 $SO(3)$ 群无穷小生成元的对易关系 (4.98) 式相一致.

例 4.18 $SU(3)$ 群的无穷小算符.

$SU(3)$ 群有八个独立群参数, 在无穷小变换下, 其变换矩阵由 (4.100) 与 (4.101) 式给出. 在该变换下, 坐标变换为

$$\begin{aligned}
x_1' &= \left[1 - \mathrm{i}\left(\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8\right)\right] x_1 - (\mathrm{i}\alpha_1 + \alpha_2)x_2 - (\mathrm{i}\alpha_4 + \alpha_5)x_3, \\
x_2' &= -(\mathrm{i}\alpha_1 - \alpha_2)x_1 + \left[1 + \mathrm{i}\left(\alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_8\right)\right] x_2 - (\mathrm{i}\alpha_6 + \alpha_7)x_3, \\
x_3' &= -(\mathrm{i}\alpha_4 - \alpha_5)x_1 - (\mathrm{i}\alpha_6 - \alpha_7)x_2 + \left(1 + \mathrm{i}\frac{2}{\sqrt{3}}\alpha_8\right) x_3.
\end{aligned} \tag{4.154}$$

故各无穷小算符为

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_1,
\end{aligned} \tag{4.155a}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_2 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_2,
\end{aligned} \tag{4.155b}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_3 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_3}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_3,
\end{aligned} \tag{4.155c}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_4 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_4}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_4}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_4}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_4,
\end{aligned} \tag{4.155d}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_5 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_5}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_5}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_5}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_5,
\end{aligned} \tag{4.155e}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_6 &= -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_6}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_6}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_6}\right|_{\alpha=0}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_6,
\end{aligned} \tag{4.155f}$$

$$\hat{X}_7 = -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_7}\right|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_7}\right|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_7}\right|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$
$$= x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_7, \tag{4.155g}$$

$$\hat{X}_8 = -\left(\left.\frac{\partial x_1'}{\partial \alpha_8}\right|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_1} + \left.\frac{\partial x_2'}{\partial \alpha_8}\right|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_2} + \left.\frac{\partial x_3'}{\partial \alpha_8}\right|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = -\mathrm{i}\hat{\lambda}_8. \tag{4.155h}$$

这些无穷小算符满足对易关系

$$\left[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j\right] = 2\mathrm{i}\sum_k f_{ijk}\hat{\lambda}_k \quad (i、j、k = 1, 2, \cdots, 8), \tag{4.156}$$

与 $SU(3)$ 群无穷小生成元的对易关系 (4.104) 式相一致.

4.5 李群的表示

由有限群的重排定理 (1.37) 式知, 一个定义在群 G 上的函数 $f(g)(g \in G)$, 具有如下求和不变的性质:

$$\sum_{g\in G} f(g) = \sum_{g\in G} f(gg') = \sum_{g\in G} f(g'g) = \sum_{g\in G} f(gg'^{-1}) = \sum_{g\in G} f(g'^{-1}g), \tag{4.157}$$

其中 $g' \in G$ 是群 G 中的任一元素. 在有限群表示论中, 这个群上求和不变式起着重要的作用, 例如, 有限群表示的幺正性与正交性定理的证明等都用到了这一求和不变式. 对于李群, 如何改写 (4.157) 式是一个很重要的问题, 若能得到相应的不变式, 则有限群表示论中的相关结果就可以直接推广到李群中.

4.5.1 群上不变积分

李群是连续群, 有限群中对元素的求和到了李群应变为对群元素的积分. 另外, 群元素是群参数的函数, 所以对群元素的积分应变为对群参数的加权积分. 这样, 对于李群, (4.157) 式应变写为

$$\int_{A(\alpha)\in G} f\left[A(\alpha)\right] w(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{A(\alpha)\in G} f\left[A(\alpha)A(\beta)\right] w(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_{A(\alpha)\in G} f\left[A(\beta)A(\alpha)\right] w(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$= \int\limits_{A(\alpha)\in G} f\left[A(\alpha)A^{-1}(\beta)\right]w(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int\limits_{A(\alpha)\in G} f\left[A^{-1}(\beta)A(\alpha)\right]w(\alpha)\mathrm{d}\alpha. \quad (4.158)$$

其中 $A(\beta)\in G$ 为李群 G 中的任一元素, $w(\alpha)=w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 为权重因子, 它是 m 个群参数的函数. 上式称为群上不变积分 (invariant integral on group). 一般来说, 不是所有李群都存在这样的不变积分, 但对于紧致李群, 上式总是成立的, 即紧致李群存在群上不变积分 (4.158) 式.

4.5.2 李群的表示

对于李群 G, 其群元素为 $A(\alpha)\in G$, 由 m 个群参数 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 描述. 如果在线性空间 L_l 中存在非奇异的 l 阶矩阵的集合 $D(A)$ 与 G 同构或同态, 则称 $D(A)$ 为李群的一组 l 阶线性表示. 一般来说, $D(A)$ 也是一个李群.

若能找到一组基矢, 使得表示的所有矩阵都有右上三角或左下三角的形式, 如

$$D(A)=\left(\begin{array}{c|c} D'(A) & X(A) \\ \hline 0 & D''(A) \end{array}\right), \quad (4.159)$$

其中 0 为零矩阵, 则称 $D(A)$ 为可约表示. 若 $X(A)$ 还是零矩阵, 即 $X(A)=0$, $D(A)$ 变为分块对角化矩阵, 则称这种表示是完全可约的.

对于有限群, 可约表示必是完全可约的. 对于李群, 情况则不然, 可约表示不一定完全可约. 但对于紧致李群, 由于存在群上不变积分 (4.158) 式, 有限群表示论中的相关结论都可直接移置过来. 例如, 紧致李群的任一表示都等价于一幺正表示, 紧致李群的表示要么不可约, 要么完全可约, 不可约幺正表示的矩阵元满足正交关系

$$\int\limits_{A(\alpha)\in G} D^{(i)*}_{\alpha\beta}\left[A(\alpha)\right]D^{(j)}_{\mu\nu}\left[A(\alpha)\right]w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\frac{\int w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha}{l_i}\delta_{ij}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}, \quad (4.160)$$

其中 l_i 为表示 $D^{(i)}(A)$ 的维数, 有限群的阶 $n=\sum\limits_{g\in G}1$ 过渡到李群时应变为积分 $\int w(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$.

4.5.3 李群的伴随表示

设有李群 G, 对于其中的每一元素 $A(\alpha)\in G$ 定义映射 $\phi=\mathrm{Ad}$, 称为伴随 (adjoint) 映射, 满足关系

$$\mathrm{Ad}A(\alpha)\left[B(\alpha)\right]=A(\alpha)B(\alpha)A^{-1}(\alpha)=B^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha), \quad (4.161)$$

其中, $B(\alpha) \in G$ 为 G 中的任一元素, $B^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) \in G$ 为用元素 $A(\alpha) \in G$ 完成 Ad 映射后的群元素. 借用 1.4 节的说法, 映射 Ad 实际上是一种 G 内元素的共轭操作 [参见 (1.55) 式], 通过该操作, 元素 $B(\alpha)$ 变成了它的共轭元素 $B^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha)$, 当 $A(\alpha)$ 取遍 G 中的所有元素时, Ad 将映射出 $B(\alpha)$ 的所有共轭元素或整个 $B(\alpha)$ 类.

对于单位元附近的群元素

$$B(\alpha) = I + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X_j + \cdots, \tag{4.162}$$

其中 X_j 是李群 G 的生成元, 则按 (4.161) 式

$$B^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) = A(\alpha) B(\alpha) A^{-1}(\alpha) = I + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X_j^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) + \cdots, \tag{4.163}$$

其中

$$X_j^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) = A(\alpha) X_j A^{-1}(\alpha), \tag{4.164}$$

是伴随变换后的 X_j. 由于 X_j 与 $X_j^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha)$ 分别是伴随变换前后 m 维线性空间的基矢, 二者应有如 (2.3) 式所示的变换关系

$$X_j^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} D_{kj}^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) X_k \quad (j = 1, 2, \cdots, m), \tag{4.165}$$

按定义, 上式中的 $D^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha)$ 是一种表示, 称为李群 G 的伴随表示. 对于 m 阶李群 G, $D^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha)$ 是 m 维的. (4.164) 与 (4.165) 两式亦表明, 对于生成元 X_j, 其伴随映射为

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}A(\alpha)(X_j) &= A(\alpha) X_j A^{-1}(\alpha) = X_j^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^{m} D_{kj}^{\mathrm{Ad}(A)}(\alpha) X_k \quad (j = 1, 2, \cdots, m). \end{aligned} \tag{4.166}$$

4.6 $SU(l)$ 群的不可约表示

这里将具体讨论物理上应用得比较多的李群 —— 特殊幺正群 $SU(l)$ 的表示及其直积的克莱布施–戈登分解.

4.6.1 $SU(l)$ 群的不可约表示与杨图

$SU(l)$ 群的不可约表示可用 $l-1$ 个参数 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{l-1})$ 描述, 这组参数可用杨图表示, 如图 4.6 所示. 该图给出的是参数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (2, 3, 1, 0, 2)$ 时的杨图. 若该图代表的是 $SU(7)$ 群的一个不可约表示, 则该表示就是 $D^{(7)}(2, 3, 1, 0,$

2, 0); 若代表的是 $SU(6)$ 群的一个不可约表示, 则该表示就是 $D^{(6)}(2,3,1,0,2)$; 同理若代表的是 $SU(5)$ 群的一个不可约表示, 则该表示就是 $D^{(5)}(2,3,1,0)$. 这时标有 λ_5 各列的格子是多余的, 可以去掉, 如图 4.7 所示. 当然, 图 4.7 也是 $SU(4)$ 群的表示 $D^{(4)}(2,3,1)$ 的杨图.

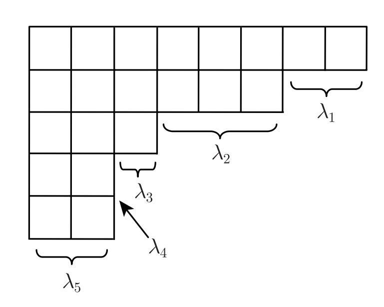


图 4.6　参数 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)=(2,3,1,0,2)$ 的杨图

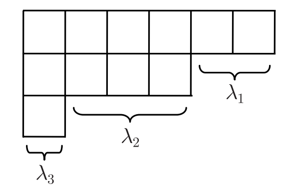


图 4.7　$SU(5)$ 群的表示 $D^{(5)}(2,3,1,0)$ 或 $SU(4)$ 群的表示 $D^{(4)}(2,3,1)$ 的杨图

4.6.2　$SU(l)$ 群不可约表示的维数

设 $SU(l)$ 群不可约表示 $D^{(l)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{l-1})$ 的维数为 $d^{(l)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{l-1})$, 则其取值的一般形式为

$$\begin{aligned}d^{(l)}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{l-1})=&\frac{1}{1!2!\cdots(l-1)!}\\&\times(\lambda_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)\cdots(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{l-1}+l-1)\\&\times(\lambda_2+1)(\lambda_2+\lambda_3+2)\cdots(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_{l-1}+l-2)\\&\times\cdots\times(\lambda_{l-1}+1).\end{aligned}\tag{4.167}$$

如, $SU(2)$ 群的不可约表示 $D^{(2)}(\lambda)$ 由一个参数描述, 设为 λ, 由 (4.167) 式知

$$d^{(2)}(\lambda)=\lambda+1.\tag{4.168}$$

再如 $SU(3)$ 群的不可约表示 $D^{(3)}(\lambda_1,\lambda_2)$ 由两个参数描述, 由 (4.167) 式知

$$d^{(3)}(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{2}(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2),\tag{4.169}$$

由上式可具体求得, 如

$$\begin{aligned}
&d^{(3)}(0,0)=1,\\
&d^{(3)}(1,1)=8,\\
&d^{(3)}(2,2)=27,\\
&d^{(3)}(1,0)=d^{(3)}(0,1)=3,\\
&d^{(3)}(2,0)=d^{(3)}(0,2)=6,\\
&d^{(3)}(3,0)=d^{(3)}(0,3)=10.
\end{aligned} \tag{4.170}$$

另如 $SU(4)$ 群的不可约表示 $D^{(4)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 由三个参数描述, 由 (4.167) 式知

$$\begin{aligned}
d^{(4)}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=&\frac{1}{1!2!3!}(\lambda_1+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3)\\
&\times(\lambda_2+1)(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_3+1).
\end{aligned} \tag{4.171}$$

由上式可具体求得, 如

$$\begin{aligned}
&d^{(4)}(0,0,0)=1,\\
&d^{(4)}(0,1,0)=6,\\
&d^{(4)}(1,0,1)=15,\\
&d^{(4)}(0,3,0)=50,\\
&d^{(4)}(1,0,0)=d^{(4)}(0,0,1)=4,\\
&d^{(4)}(2,0,0)=d^{(4)}(0,0,2)=10,\\
&d^{(4)}(1,1,0)=d^{(4)}(0,1,1)=d^{(4)}(0,2,0)=d^{(4)}(3,0,0)=d^{(4)}(0,0,3)=20.
\end{aligned} \tag{4.172}$$

4.6.3 $SU(l)$ 群不可约表示直积的分解

由 2.7 节的讨论知, 群的两个表示的直积也是群的一个表示且是可约的. 可按不可约表示作直和分解, 即作如 (2.150) 式所示的克莱布施–戈登展开

$$D^{(i)}(g)\otimes D^{(j)}(g)=\sum_k{}^{\oplus}a_{i,jk}D^{(k)}(g)\quad(g\in G).$$

完成上述展开的关键在于确定两直积表示中包含的各不可约表示及出现的次数. 这里将具体讨论 $SU(l)$ 群两不可约表示直积的克莱布施–戈登展开, 介绍这种展开的杨图分解法.

在直积展开的杨图分解法中, 先作出两个参与直积的不可约表示的杨图. 比如, $SU(3)$ 群两表示的直积 $D^{(3)}(1,1)\otimes D^{(3)}(1,1)$, 相应的杨图如图 4.8 所示.

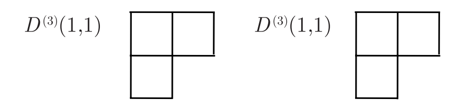


图 4.8　$SU(3)$ 群两参与直积表示的杨图

选择其中的一个杨图作为基础图, 为简单起见, 通常选择格子数较多者为基础图. 保持基础图不变而将另一个杨图中的格子按行标号, 即第 1 行的格子都填 1, 第 2 行的都填 2 等. 然后将标号为 1 的格子按下述规则加到基础图上, 作出一切可能扩大的杨图. 再将标号为 2 等的格子按同样的规则加到已扩大了的杨图上, 直到加完所有的格子. 最后将所有可能扩大了的杨图直和起来, 就是两表示直积的分解.

加格子的规则是:

(1) 加到基础图上同一行格子的标号从左到右是不减次序, 即自左而右标号由小到大, 可以重复.

(2) 加到基础图上同一列格子的标号从上到下是增加次序, 即自上而下标号由小到大, 不能重复.

(3) 扩大而成的每个图必须是杨图, 对于 $SU(l)$ 群, 总行数不能超过 l.

(4) 从最后得到的每一杨图的第 1 行开始, 由右向左逐行读这些标号时, 每读一标号读过的不同标号数目需满足关系

$$\text{标号 1 的数目} \geqslant \text{标号 2 的数目} \geqslant \text{标号 3 的数目等,} \tag{4.173}$$

也就是说, 标号由 1 开始, 在大标号出现之前小标号要先出现, 且小标号出现的次数不能少于大标号出现的次数. 比如, 两个 1、两个 2 与一个 3, 可能的情况只能是 11223、11232、12123、12312 等, 而不能是 21123、12213、11322、12321 等.

例 4.19　$SU(3)$ 群的不可约表示 $D^{(3)}(1,1)$ 的杨图如图 4.8 所示. 取该图中的第 1 个杨图为基础图, 将第 2 个杨图按行标号, 并按上述规则将第 2 杨图中的格子加到第 1 杨图上, 得到扩大了的杨图如图 4.9 所示.

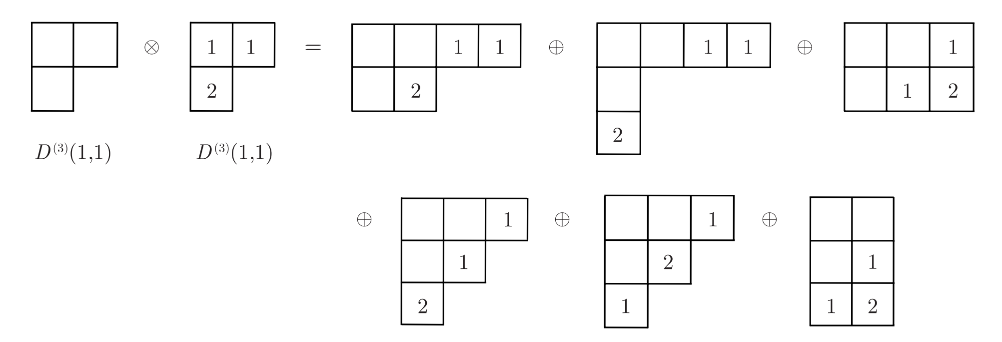


图 4.9　$SU(3)$ 群一表示杨图中标有行号的格子加到另一表示杨图后得到的扩大了的杨图

由于不可约表示 $D^{(3)}$ 只需要两个参数, 对应的杨图只需要两行, 含有三行的列可略去不计, 上图变成图 4.10.

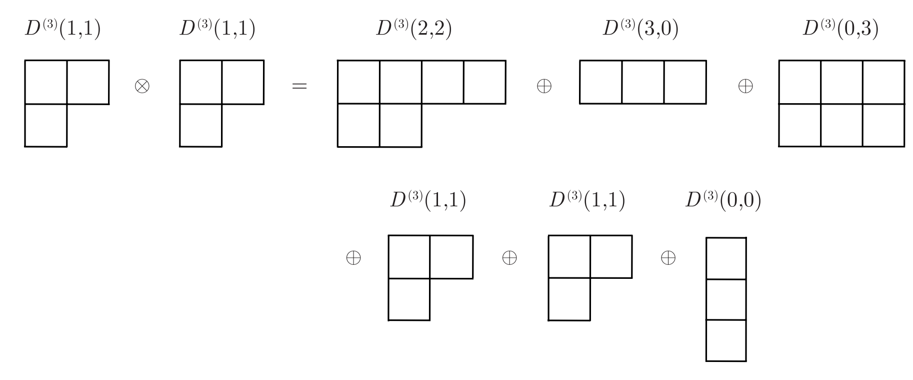


图 4.10　$SU(3)$ 群两不可约表示直积 $D^{(3)}(1,1)\otimes D^{(3)}(1,1)$ 的杨图分解

这样

$$\begin{aligned} D^{(3)}(1,1)\otimes D^{(3)}(1,1) =& D^{(3)}(2,2)\oplus D^{(3)}(3,0)\oplus D^{(3)}(0,3) \\ &\oplus D^{(3)}(1,1)\oplus D^{(3)}(1,1)\oplus D^{(3)}(0,0), \end{aligned} \tag{4.174a}$$

或由 (4.170) 式, 用表示的维数简记为

$$8\otimes 8 = 27\oplus 10\oplus \overline{10}\oplus 8\oplus 8\oplus 1, \tag{4.174b}$$

其中 $\overline{10} = d^{(3)}(0,3)$, 以区别 $10 = d^{(3)}(3,0)$.

例 4.20　$SU(3)$ 群两不可约表示直积 $D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(0,1)$ 的杨图分解如图 4.11 所示.

$D^{(3)}(1,0)$　$D^{(3)}(0,1)$　$D^{(3)}(1,1)$　$D^{(3)}(0,0)$

图 4.11　$SU(3)$ 群两不可约表示直积 $D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(0,1)$ 的杨图分解

表明

$$D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(0,1) = D^{(3)}(1,1)\oplus D^{(3)}(0,0), \tag{4.175a}$$

或由 (4.170) 式

$$3\otimes\bar{3} = 8\oplus 1, \tag{4.175b}$$

其中 $\bar{3} = D^{(3)}(0,1)$ 以区别 $3 = D^{(3)}(1,0)$.

例 4.21　$SU(3)$ 群两不可约表示直积 $D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)$ 的杨图分解如图 4.12 所示.

图 4.12　$SU(3)$ 群两不可约表示直积 $D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)$ 的杨图分解

可见

$$D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)=D^{(3)}(2,0)\oplus D^{(3)}(0,1)\,, \tag{4.176a}$$

或由 (4.170) 式

$$3\otimes 3=6\oplus\bar{3}. \tag{4.176b}$$

例 4.22　$SU(3)$ 群三个不可约表示的直积 $D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)$ 的杨图分解如图 4.13 所示.

图 4.13　$SU(3)$ 群三个不可约表示的直积 $D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)$ 的杨图分解

这样

$$\begin{aligned}&D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)\otimes D^{(3)}(1,0)\\=&D^{(3)}(3,0)\oplus D^{(3)}(1,1)\oplus D^{(3)}(1,1)\oplus D^{(3)}(0,0)\,,\end{aligned} \tag{4.177a}$$

或

$$3\otimes 3\otimes 3=10\oplus 8\oplus 8\oplus 1. \tag{4.177b}$$

例 4.23　$SU(2)$ 群两不可约表示直积 $D^{(2)}(1)\otimes D^{(2)}(1)$ 的杨图分解如图 4.14 所示.

$D^{(2)}(1)$ $D^{(2)}(1)$ $D^{(2)}(2)$ $D^{(2)}(0)$

□ ⊗ 1 = □ 1 ⊕ □ 1

图 4.14 $SU(2)$ 群两不可约表示直积 $D^{(2)}(1) \otimes D^{(2)}(1)$ 的杨图分解

则

$$D^{(2)}(1) \otimes D^{(2)}(1) = D^{(2)}(2) \oplus D^{(2)}(0)\,, \tag{4.178a}$$

或由 (4.168) 式, 用表示的维数简记为

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1. \tag{4.178b}$$

这里想做一提的是, 与杨图 4.7 一样, 杨图 4.12 与图 4.14 以及后面的图 4.17 虽然在形式上完全一样, 但它们却代表着完全不同的表示.

例 4.24 $SU(2)$ 群两不可约表示直积 $D^{(2)}(2) \otimes D^{(2)}(1)$ 的杨图分解如图 4.15 所示.

$D^{(2)}(2)$ $D^{(2)}(1)$ $D^{(3)}$ $D^{(2)}(1)$

□□ ⊗ 1 = □□ 1 ⊕ □□ 1

图 4.15 $SU(2)$ 群两不可约表示直积 $D^{(2)}(2) \otimes D^{(2)}(1)$ 的杨图分解

可见

$$D^{(2)}(2) \otimes D^{(2)}(1) = D^{(2)}(3) \oplus D^{(2)}(1)\,, \tag{4.179a}$$

或由 (4.168) 式

$$3 \otimes 2 = 4 \oplus 2. \tag{4.179b}$$

例 4.25 $SU(4)$ 群两不可约表示直积 $D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(0,0,1)$ 的杨图分解如图 4.16 所示.

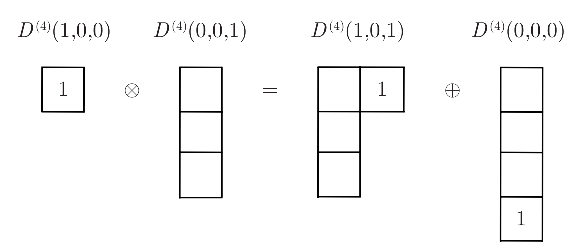


图 4.16 $SU(4)$ 群两不可约表示直积 $D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(0,0,1)$ 的杨图分解

由此得关系

$$D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(0,0,1) = D^{(4)}(1,0,1) \oplus D^{(4)}(0,0,0), \tag{4.180a}$$

或由 (4.172) 式, 用表示的维数简记为

$$4 \otimes \bar{4} = 15 \oplus 1, \tag{4.180b}$$

其中 $\bar{4} = D^{(4)}(0,0,1)$, 以区别 $4 = D^{(4)}(1,0,0)$.

例 4.26　$SU(4)$ 群两不可约表示直积 $D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(1,0,0)$ 的杨图分解如图 4.17 所示.

图 4.17　$SU(4)$ 群两不可约表示直积 $D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(1,0,0)$ 的杨图分解

亦即

$$D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(1,0,0) = D^{(4)}(2,0,0) \oplus D^{(4)}(0,1,0), \tag{4.181a}$$

或由 (4.172) 式

$$4 \otimes 4 = 10 \oplus 6, \tag{4.181b}$$

例 4.27　$SU(4)$ 群三个不可约表示的直积 $D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(1,0,0)$ 的杨图分解如图 4.18 所示.

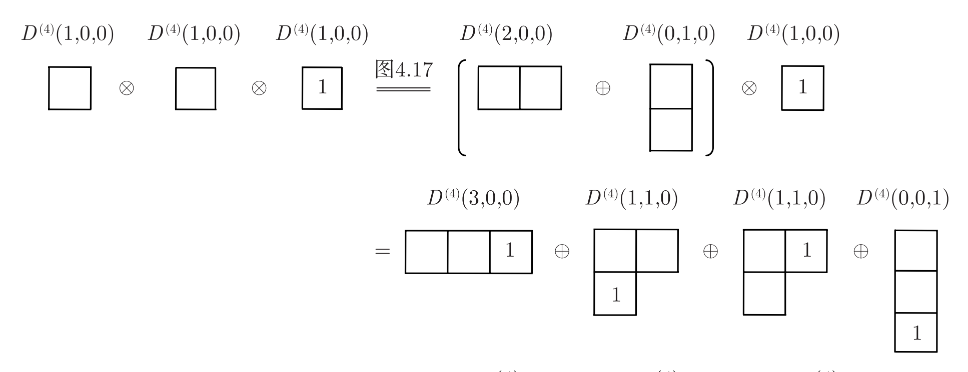


图 4.18　$SU(4)$ 群三个不可约表示的直积 $D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(1,0,0) \otimes D^{(4)}(1,0,0)$ 的杨图分解

由此得

$$\begin{aligned} & D^{(4)}(1,0,0)\otimes D^{(4)}(1,0,0)\otimes D^{(4)}(1,0,0) \\ =& D^{(4)}(3,0,0)\oplus D^{(4)}(1,1,0)\oplus D^{(4)}(1,1,0)\oplus D^{(4)}(0,0,1), \end{aligned} \tag{4.182a}$$

或由 (4.172) 式, 用表示的维数简记为

$$4\otimes 4\otimes 4 = 20\oplus 20\oplus 20\oplus \bar{4}. \tag{4.182b}$$

第 5 章　$SO(3)$ 群及其表示

本章将讨论最简单的一种非阿贝尔李群 —— 三维旋转群, 即 $SO(3)$ 群及其表示. 三维旋转群在物理学中有着重要的应用. 它不仅是描述普通坐标空间中物理系统各向同性的对称群, 也是处理某些内部空间物理问题, 例如, 粒子的自旋与同位旋等的有用工具. 本章将介绍 $SO(3)$ 群的基本知识, 包括 $SO(3)$ 群的欧拉角描述及其与 $SU(2)$ 群的同态关系; $SO(3)$ 群的不可约表示; 坐标转动变换下场的变换形式与轨道角动量算符的本征值方程; 角动量耦合与 CG 系数; 坐标转动变换下算符的变换形式与维格纳–埃卡特 (Wigner-Eckart) 定理等.

5.1　$SO(3)$ 群及其与 $SU(2)$ 群的同态关系

5.1.1　$SO(3)$ 群的欧拉角描述

$SO(3)$ 群是三参数 $[l(l-1)/2, l=3]$ 的李群, 在例 4.12 中, 曾求得 $SO(3)$ 群的群元素 (4.95) 式. 在该例中群参数取成绕原三个坐标轴的三个转角 α_1、α_2 与 α_3. 在实际应用中, 这组群参数通常改用三个欧拉 (Euler) 角 α、β 与 γ. 这里将给出该情况下 $SO(3)$ 群元素的形式.

采用欧拉角描述 $SO(3)$ 群时, 其转动方式如下：

(1) 绕 z 轴转 α 角, 这时矢量 $\boldsymbol{r}$ 变为 $\boldsymbol{r}'$, 其矩阵形式为

$$r' = R_z(\alpha)\, r, \tag{5.1}$$

其变换矩阵 $R_z(\alpha)$ 如 (4.93) 式所示, 为

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

(2) 绕新坐标系的 y' 轴转 β 角, 变矢量 $\boldsymbol{r}'$ 为 $\boldsymbol{r}''$, 其矩阵形式为

$$r'' = R_{y'}(\beta)\, r'. \tag{5.3}$$

显然

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z^{-1}(\alpha), \tag{5.4}$$

这样绕新坐标系 y' 轴的转动变成绕原坐标系坐标轴的转动, 其中的 $R_y(\beta)$ 如 (4.91) 式所示, 为

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

将 (5.1) 与 (5.4) 代入 (5.3) 式, 得 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}''$ 之间的变换关系

$$r'' = R_z(\alpha) R_y(\beta) r. \tag{5.6}$$

(3) 绕 z'' 轴转 γ 角, 变矢量 $\boldsymbol{r}''$ 为 $\boldsymbol{r}'''$, 其矩阵形式为

$$r''' = R_{z''}(\gamma) r'', \tag{5.7}$$

而

$$R_{z''}(\gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \left[R_z(\alpha) R_y(\beta)\right]^{-1}. \tag{5.8}$$

将 (5.6) 与 (5.8) 代入 (5.7) 式, 得 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'''$ 之间的变换关系

$$\begin{aligned} r''' &= R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) r \\ &= R(\alpha,\beta,\gamma) r, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & R(\alpha,\beta,\gamma) \\ = & R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) \\ = & \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

亦即

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ -\sin\alpha\sin\gamma\end{array} & \begin{array}{c}-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ -\sin\alpha\cos\gamma\end{array} & \cos\alpha\sin\beta \\ \begin{array}{c}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ +\cos\alpha\sin\gamma\end{array} & \begin{array}{c}-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ +\cos\alpha\cos\gamma\end{array} & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

这就是用三个欧拉角 α、β 与 γ 表示的 $SO(3)$ 群元素的表达式, 其中 α 与 γ 是绕 z 轴的转角, 取值范围 $0 \leqslant \alpha$、$\gamma \leqslant 2\pi$, β 为绕 y 轴的转角, 取值范围 $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$.

在上式中取 $\beta=0$, 得

$$R\left(\alpha,0,\gamma\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\alpha+\gamma\right) & -\sin\left(\alpha+\gamma\right) & 0\\ \sin\left(\alpha+\gamma\right) & \cos\left(\alpha+\gamma\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

因此, 单位元不仅处在零参数 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 处, 亦处在 $\beta=0$ 与 $\alpha+\gamma=0$ 处, 所以三个欧拉角不再是正则群参数.

5.1.2 $SO\left(3\right)$ 与 $SU\left(2\right)$ 群的同组群参数描述

在例 4.3 中, 曾求得 $SU\left(2\right)$ 群的群元素 (4.42) 式

$$U\left(a,b\right)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b^{*} & a^{*}\end{pmatrix},\quad \left|a\right|^{2}+\left|b\right|^{2}=1, \tag{5.11}$$

与 $SO\left(3\right)$ 群一样, $SU\left(2\right)$ 也是一个有三参数的李群, 且两者具有相同的群参数, 证明如下:

设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 是三维空间中的任一矢量, 它与泡利矩阵的点积

$$M=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}=x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3=\begin{pmatrix}x_3 & x_1-\mathrm{i}x_2\\ x_1+\mathrm{i}x_2 & -x_3\end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

表明 M 是一个无迹厄米矩阵, 且

$$\det M=-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right). \tag{5.13}$$

取 $U\in SU\left(2\right)$, 对 M 作相似变换

$$M'=UMU^{\dagger}, \tag{5.14}$$

由于 U 是幺正的, $U^{\dagger}{=}U^{-1}$, 矩阵的迹在相似变换下不变, 所以 M' 与 M 一样, 也是一无迹厄米矩阵. 而任一 2×2 无迹厄米矩阵可表示成泡利矩阵的线性组合, 所以 M' 可写成

$$M'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\sigma}=x_1'\sigma_1+x_2'\sigma_2+x_3'\sigma_3=\begin{pmatrix}x_3' & x_1'-\mathrm{i}x_2'\\ x_1'+\mathrm{i}x_2' & -x_3'\end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

此时

$$\det M'=-\left({x_1'}^2+{x_2'}^2+{x_3'}^2\right). \tag{5.16}$$

由于矩阵的行列式在相似变换下不变, 所以 $\det M=\det M'$. 这样, 由 (5.13) 与 (5.16) 两式知

$${x_1'}^2+{x_2'}^2+{x_3'}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2, \tag{5.17}$$

表明由 $U \in SU(2)$ 所构成的相似变换 (5.14) 式与正交变换一样, 不改变矢量的长度. 因此每一个 $U \in SU(2)$ 应对应一个三维空间的正交变换, 即对于任一相似变换

$$M = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \xrightarrow{U \in SU(2)} M' = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma} = UMU^{\dagger} = U\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} U^{\dagger}, \tag{5.18}$$

对应于正交变换

$$r \xrightarrow{R_U \in SO(3)} r' = R_U r. \tag{5.19}$$

为了得到 $U \in SU(2)$ 与 $R_U \in SO(3)$ 间的具体关系, 将 (5.11)、(5.12) 与 (5.15) 式代入 (5.14) 式得

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_3' & x_1' - \mathrm{i}x_2' \\ x_1' + \mathrm{i}x_2' & -x_3' \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - \mathrm{i}x_2 \\ x_1 + \mathrm{i}x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} ax_3 + b(x_1 + \mathrm{i}x_2) & a(x_1 - \mathrm{i}x_2) - bx_3 \\ -b^*x_3 + a^*(x_1 + \mathrm{i}x_2) & -b^*(x_1 - \mathrm{i}x_2) - a^*x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

展开上式得

$$\begin{aligned}
x_1' - \mathrm{i}x_2' &= \left(a^2 - b^2\right) x_1 - \mathrm{i}\left(a^2 + b^2\right) x_2 - 2abx_3, \\
x_1' + \mathrm{i}x_2' &= \left(a^{*2} - b^{*2}\right) x_1 + \mathrm{i}\left(a^{*2} + b^{*2}\right) x_2 - 2a^*b^*x_3, \\
x_3' &= (a^*b + ab^*) x_1 + \mathrm{i}(a^*b - ab^*) x_2 + (aa^* - bb^*) x_3,
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
x_1' &= \frac{1}{2}\left(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}\right) x_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}\right) x_2 - (ab + a^*b^*) x_3, \\
x_2' &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}\right) x_1 + \frac{1}{2}\left(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}\right) x_2 + \mathrm{i}(a^*b^* - ab) x_3, \\
x_3' &= (a^*b + ab^*) x_1 + \mathrm{i}(a^*b - ab^*) x_2 + (aa^* - bb^*) x_3,
\end{aligned} \tag{5.20a}$$

或写成矩阵形式

$$r' = R_U r = R(a, b) r, \tag{5.20b}$$

其中

$$R(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}\right) & -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}\right) & -(ab + a^*b^*) \\ \frac{\mathrm{i}}{2}\left(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}\right) & \frac{1}{2}\left(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}\right) & \mathrm{i}(a^*b^* - ab) \\ a^*b + ab^* & \mathrm{i}(a^*b - ab^*) & aa^* - bb^* \end{pmatrix}. \tag{5.20c}$$

这就是用 $SU(2)$ 的群参数表示的正交变换矩阵, 表明 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 群有共同的群参数 a 与 b. 进一步可证明

$$\det R(a,b) = +1, \tag{5.21}$$

即 (5.20c) 式的 R 是 $SO(3)$ 的群元素 $R \in SO(3)$. 这种证明是简单的, 因为正交变换矩阵的行列式只能是 ±1[参见 (4.23) 式], 即 $\det R$ 要么是 $+1$, 要么是 -1, 且两者的参数空间是不连通的. 由于当 $a=1, b=0$ 时, $\det R(1,0) = +1$, 所以在整个参数空间, $\det R(a,b) = +1$, 因此 $R \in SO(3)$.

5.1.3 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 群的同态关系

$SU(2)$ 与 $SO(3)$ 群元素之间有对应关系 (5.18) 与 (5.19) 式, 可以证明这种对应关系是同态的.

证明 设有映射关系

$$\begin{aligned} U \in SU(2) \quad &\to \quad R_U \in SO(3), \\ U' \in SU(2) \quad &\to \quad R_{U'} \in SO(3), \\ UU' \in SU(2) \quad &\to \quad R_{UU'} \in SO(3), \end{aligned} \tag{5.22}$$

显然, 只要能证明 $R_{UU'}=R_U R_{U'}$, 即两元素乘积的映射等于两元素映射的乘积, 保持乘法规则不变, 同态关系即得证. 为此, 取 $U' \in SU(2)$ 对 (5.12) 式的矩阵 M 作相似变换, 由 (5.14) 与 (5.15) 式得

$$M' = U'MU'^{\dagger} = U'\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}U'^{\dagger} = \boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\sigma} \xlongequal{(5.20\text{b})式} \sum_{i=1}^{3} (R_{U'}r)_i \sigma_i. \tag{5.23}$$

用 U 与 $U^{\dagger}$ 分别左、右乘上式两边得

$$\begin{aligned} UU'MU'^{\dagger}U^{\dagger} = UU'M(UU')^{\dagger} &\xlongequal{(5.23)式} U\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\sigma}U^{\dagger} = \sum_{i=1}^{3}(R_U r')_i \sigma_i \\ &\xlongequal{(5.20\text{b})式} \sum_{i=1}^{3}(R_U R_{U'} r)_i \sigma_i, \end{aligned}$$

亦即

$$UU'\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}(UU')^{\dagger} = \sum_{i=1}^{3}(R_U R_{U'} r)_i \sigma_i, \tag{5.24}$$

另按假设 (5.22) 式

$$UU'\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}(UU')^{\dagger} = \sum_{i=1}^{3}(R_{UU'} r)_i \sigma_i, \tag{5.25}$$

(5.24) 与 (5.25) 两式表明

$$R_{UU'} = R_U R_{U'}, \tag{5.26}$$

所需关系得证, $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 群同态. 进一步可证明, 两者的同态关系是 $SU(2)$ 中的两个群元素对应于 $SO(3)$ 中的一个群元素. 因为对于任意的 $U \in SU(2)$ 与 $-U \in SU(2)$

$$M' = UMU^\dagger = (-U)\,M\,(-U)^\dagger\,, \tag{5.27}$$

所以 $\pm U \in SU(2)$ 对应于 $SO(3)$ 中的同一元素. 由于这样的同态特点, 通常称 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的覆盖群, 商群 $SU(2)/Z_2$ 与 $SO(3)$ 同构.

5.1.4 $SU(2)$ 群的欧拉角描述

(5.11) 与 (5.20c) 两式给出了一般情况下, $U \in SU(2)$ 与 $R \in SO(3)$ 的矩阵形式, 两者由共同的群参数 a 与 b 确定. (5.9) 式给出了 $R \in SO(3)$ 的欧拉角形式, 由于 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 群有共同的群参数, 所以欧拉角 α、β 与 γ 也应是 $SU(2)$ 的群参数. 这里将给出该情况下 $U \in SU(2)$ 的形式.

设 $U_z \in SU(2)$ 取形式

$$U_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

其中 α 为实数. 将上式与 (5.11) 式相比较知, 参数

$$a = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha}, \quad b = 0. \tag{5.29}$$

将它们代入 (5.20c) 式得

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

正是绕 z 轴转角为 α 时的正交变换矩阵 (5.2) 式. 进一步再取

$$U_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\beta}{2} & -\sin\dfrac{\beta}{2} \\ \sin\dfrac{\beta}{2} & \cos\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

与 (5.11) 式相比较知

$$a = \cos\frac{\beta}{2}, \quad b = -\sin\frac{\beta}{2}. \tag{5.31}$$

将它们代入 (5.20c) 式得

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$

正是绕 y 轴转 β 角的正交变换矩阵 (5.5) 式.

由于 $R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma)$, 所以与之对应的

$$\begin{aligned} U(\alpha,\beta,\gamma) &= U_z(\alpha) U_y(\beta) U_z(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\beta}{2} & -\sin\dfrac{\beta}{2} \\ \sin\dfrac{\beta}{2} & \cos\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

亦即

$$U(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos\dfrac{\beta}{2} & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha-\gamma}{2}} \sin\dfrac{\beta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha-\gamma}{2}} \sin\dfrac{\beta}{2} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

这就是用欧拉角表示的 $U(\alpha,\beta,\gamma) \in SU(2)$, 将其与 (5.11) 式相比较知, 参数

$$a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cos\frac{\beta}{2}, \quad b = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha-\gamma}{2}} \sin\frac{\beta}{2}, \tag{5.33}$$

通常将 a 与 b 的上述形式称为凯莱–克莱因 (Cayley-Klein) 参数.

由 (5.33) 式可以看出, 当 $\alpha \Rightarrow \alpha + 2\pi$, 或 $\gamma \Rightarrow \gamma + 2\pi$ 时, $a \Rightarrow -a$, $b \Rightarrow -b$, 所以 $U \Rightarrow -U$. 而由 (5.9) 式知, 此时的 $R(\alpha,\beta,\gamma) \in SO(3)$ 保持不变, 因此 $SU(2)$ 的两个群元素同态对应于 $SO(3)$ 的一个群元素.

5.2 $SU(2)$ 群的不可约表示

由于 $SO(3)$ 与商群 $SU(2)/Z_2$ 同构, 所以两者有相同的表示, 而商群的表示又是其大群的表示, 所以 $SO(3)$ 群的表示也是 $SU(2)$ 群的表示. 这样, 对 $SO(3)$ 群表示的求解问题, 可变成对 $SU(2)$ 群表示的求解问题. 本节将对 $SU(2)$ 群的不可约表示作以讨论.

5.2.1 $SU(2)$ 群的不可约表示

设有二维向量 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x_1, x_2)$, 在

$$U^{-1} \in SU(2), \ U^{-1} = U^\dagger \xlongequal{(5.11)\text{式}} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$$

的变换下, 得

$$x_i' = \sum_j U_{ij}^{-1} x_j \quad (i、j = 1, 2),$$

或

$$\begin{aligned} x_1' &= a^* x_1 - b x_2, \\ x_2' &= b^* x_1 + a x_2. \end{aligned} \tag{5.34}$$

注意到 (5.11) 式中的参数条件: $|a|^2 + |b|^2 = 1$, 容易证明

$$|x_1'|^2 + |x_2'|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2. \tag{5.35}$$

由矢量 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x_1, x_2)$ 可构成二维空间的任意函数, 如

$$\eta_{lm}(x_1, x_2) = \frac{x_1^{l-m} x_2^{l+m}}{\sqrt{(l-m)!\,(l+m)!}}, \tag{5.36a}$$

其中

$$m = l, l-1, \cdots, -l; l\text{取半正整数或零}. \tag{5.36b}$$

容易证明: $\eta_{lm}(x_1, x_2)$ 满足条件

$$\sum_{m=-l}^{l} |\eta_{lm}(x_1', x_2')|^2 = \sum_{m=-l}^{l} |\eta_{lm}(x_1, x_2)|^2. \tag{5.37}$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^{l} |\eta_{lm}(x_1', x_2')|^2 &= \sum_{m=-l}^{l} \frac{\left(|x_1'|^2\right)^{l-m} \left(|x_2'|^2\right)^{l+m}}{(l-m)!\,(l+m)!} \\ &\overset{l-m=k}{=\!=\!=} \frac{1}{(2l)!} \sum_{k=0}^{2l} \frac{(2l)!}{k!\,(2l-k)!} \left(|x_1'|^2\right)^k \left(|x_2'|^2\right)^{2l-k} \\ &= \frac{1}{(2l)!} \left(|x_1'|^2 + |x_2'|^2\right)^{2l} \\ &\overset{(5.35)\text{式}}{=\!=\!=} \frac{1}{(2l)!} \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{2l} \\ &= \sum_{m=-l}^{l} |\eta_{lm}(x_1, x_2)|^2, \quad \Rightarrow \text{证毕}. \end{aligned}$$

上面由第 2 到第 3 等式, 用到了二项式定理

$$(a+b)^l = \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{k!\,(l-k)!} a^k b^{l-k}. \tag{5.38}$$

为了看出 (5.36a) 式定义的函数 $\eta_{lm}(x_1,x_2)$ 的意义, 设有变换算符 $\hat{P}(U)$, 按照 (4.138) 式, 它对 $\eta_{lm}(x_1,x_2)$ 作用后变为

$$\begin{aligned}\hat{P}(U)\eta_{lm}(x_1,x_2)&=\eta_{lm}\left(U^{-1}x_1,U^{-1}x_2\right)=\eta_{lm}(x_1',x_2')\\&\xlongequal{(5.34)\text{式}}\frac{(a^*x_1-bx_2)^{l-m}(b^*x_1+ax_2)^{l+m}}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}\\&\xlongequal{(5.38)\text{式}}\sum_{k'=0}^{l-m}\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^{l-m-k'}\frac{[(l-m)!(l+m)!]^{\frac12}}{k'!(l-m-k')!k!(l+m-k)!}\\&\quad\times a^{*k'}b^{l-m-k'}b^{*k}a^{l+m-k}x_1^{k+k'}x_2^{2l-k-k'}.\end{aligned}$$

令 $m'=l-k-k'$, 当 $k'=0,k=0$ 时, $m'=l$; 当 $k'=l-m,k=l+m$ 时, $m'=-l$. 则上式可变写成对 k 与 m' 的求和

$$\begin{aligned}&\hat{P}(U)\eta_{lm}(x_1,x_2)\\&=\sum_{m'=-l}^{l}\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^{m'-m+k}\frac{[(l-m)!(l+m)!]^{\frac12}}{(l-m'-k)!(m'-m+k)!k!(l+m-k)!}\\&\quad\times a^{*l-m'-k}b^{m'-m+k}b^{*k}a^{l+m-k}x_1^{l-m'}x_2^{l+m'}\\&=\sum_{m'=-l}^{l}\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^{m'-m+k}\frac{[(l-m')!(l+m')!(l-m)!(l+m)!]^{\frac12}}{(l-m'-k)!(m'-m+k)!k!(l+m-k)!}\\&\quad\times a^{*l-m'-k}b^{m'-m+k}b^{*k}a^{l+m-k}\frac{x_1^{l-m'}x_2^{l+m'}}{\sqrt{(l-m')!(l+m')!}}\\&\xlongequal{(5.36\text{a})\text{式}}\sum_{m'=-l}^{l}\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^{m'-m+k}\frac{[(l-m')!(l+m')!(l-m)!(l+m)!]^{\frac12}}{(l-m'-k)!(m'-m+k)!k!(l+m-k)!}\\&\quad\times a^{*l-m'-k}b^{m'-m+k}b^{*k}a^{l+m-k}\eta_{lm'}(x_1,x_2),\end{aligned}$$

亦即

$$\hat{P}(U)\eta_{lm}(x_1,x_2)=\eta_{lm}(x_1',x_2')=\sum_{m'=-l}^{l}D_{m'm}^{(l)}(U)\eta_{lm'}(x_1,x_2),\tag{5.39}$$

其中

$$\begin{aligned}&D_{m'm}^{(l)}(U)=D_{m'm}^{(l)}(a,b)\\&=\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^{m'-m+k}\frac{[(l-m')!(l+m')!(l-m)!(l+m)!]^{\frac12}}{(l-m'-k)!(m'-m+k)!k!(l+m-k)!}\\&\quad\times a^{*l-m'-k}b^{m'-m+k}b^{*k}a^{l+m-k}.\end{aligned}\tag{5.40}$$

将 (5.39) 与 (2.3) 式比较知, (5.40) 式的 $D^{(l)}(U)$ 正是 $SU(2)$ 群的表示矩阵, 而 (5.36a) 式定义的 $\eta_{lm}(x_1,x_2)$ 是 $SU(2)$ 群表示空间的基矢, 共有 $2l+1$ 个分量, 所以 $D^{(l)}(U)$ 是 $(2l+1)\times(2l+1)$ 方阵. 在实际应用中, 通常采用幺正矩阵

$$A_{m'm}=(-1)^{-m'}\delta_{m'm},\quad A^{-1}_{m'm}=A^{\dagger}_{m'm}=(-1)^{m'}\delta_{m'm}, \tag{5.41}$$

对 $D^{(l)}(U)$ 作一相似变换 $AD^{(l)}(U)A^{-1}$, 消去该式中的因子 $(-1)^{m'-m}$, 使其变为

$$\begin{aligned}D^{(l)}_{m'm}(U)=D^{(l)}_{m'm}(a,b)=&\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k\frac{[(l-m')!\,(l+m')!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k)!\,(m'-m+k)!k!\,(l+m-k)!}\\&\times a^{*l-m'-k}b^{m'-m+k}b^{*k}a^{l+m-k}.\end{aligned} \tag{5.42a}$$

其中

$$m',m=l,l-1,\cdots,-l;l\text{取半正整数或零}. \tag{5.42b}$$

5.2.2 $SU(2)$ 群不可约表示的性质

(5.42) 式的不可约表示 $D^{(l)}(U)$ 具有如下几方面性质:

1. $D^{(l)}(U)$ 是幺正的

由 (5.39) 式知

$$\begin{aligned}\sum_{m=-l}^{l}\left|\eta_{lm}(x_1',x_2')\right|^2=&\sum_{m=-l}^{l}\sum_{i=-l}^{l}D^{(l)}_{im}(U)\,\eta_{li}(x_1,x_2)\sum_{j=-l}^{l}D^{(l)*}_{jm}(U)\,\eta^{*}_{lj}(x_1,x_2)\\\xlongequal{(5.37)\text{式}}&\sum_{m=-l}^{l}\left|\eta_{lm}(x_1,x_2)\right|^2,\end{aligned}$$

表明

$$\sum_{m=-l}^{l}D^{(l)}_{im}(U)\,D^{(l)*}_{jm}(U)=\delta_{ij},\quad \text{或}\sum_{m=-l}^{l}D^{(l)}_{im}(U)\,D^{(l)\dagger}_{mj}(U)=\delta_{ij},$$

或

$$D^{(l)}(U)\,D^{(l)\dagger}(U)=1,$$

故

$$D^{(l)\dagger}(U)=D^{(l)-1}(U), \tag{5.43}$$

$D^{(l)}(U)$ 是幺正的.

2. $D^{(l)}(U)$ 是不可约的

由舒尔定理 1 知, 如果矩阵 M 与所有的 $D^{(l)}(U)$ 都对易, 则当 M 为常数矩阵时, $D^{(l)}(U)$ 就是不可约表示. 为了看出这一点, 先取参数

$$a = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha}, \quad b = 0, \tag{5.44}$$

则由于 (5.42) 式中 $b^{m'-m+k}b^{*k}$ 项的存在, 求和项中只有当 $k=0$ 且 $m'=m$ 时, $D^{(l)}_{m'm}(U)$ 才不为零, 由此得

$$D^{(l)}_{m'm}(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha}, 0) = \delta_{m'm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}. \tag{5.45}$$

另在 (5.42) 式中, 令 $m'=l$, 注意到该式中的因子 $(l-m'-k)!$ 的存在, 且负数的阶乘为无穷大没意义, 所以只有当 $k=0$ 时, $D^{(l)}_{lm}(U)$ 才不为零, 这样

$$D^{(l)}_{lm}(a,b) = \left[\frac{(2l)!}{(l+m)!\,(l-m)!}\right]^{\frac{1}{2}} a^{l+m}b^{l-m}. \tag{5.46}$$

如果 M 与 (5.45) 式所示的 $D^{(l)}_{m'm}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2\alpha}, 0\right)$ 对易, 则由于 $D^{(l)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2\alpha}, 0\right)$ 是一非常数对角矩阵, 所以 M 也应是一对角矩阵, 即

$$M_{ik} = M_i\delta_{ik}. \tag{5.47}$$

进一步, 若 M 还与 (5.46) 式的矩阵 $D^{(l)}(a,b)$ 对易, 即 $MD^{(l)}(a,b) = D^{(l)}(a,b)M$, 或

$$\sum_i M_{ki}D^{(l)}_{im}(a,b) = \sum_i D^{(l)}_{ki}(a,b)M_{im}. \tag{5.48}$$

将 (5.47) 代入 (5.48) 式得

$$M_k D^{(l)}_{km}(a,b) = D^{(l)}_{km}(a,b)M_i. \tag{5.49}$$

由于矩阵元 $D^{(l)}_{km}(a,b)$ 不恒等于零, 所以 $M_k = M_i$, 即 M 为一常数矩阵

$$M_{ik} = M\delta_{ik}, \tag{5.50}$$

按舒尔定理 1, $D^{(l)}(U)$ 是一不可约表示.

3. $D^{(l)}(-U) = (-1)^{2l}D^{(l)}(U)$　　(5.51)

在 (5.42) 式中作代换 $a \Rightarrow -a, b \Rightarrow -b$, 上式即可得到证明.

5.3 $SO(3)$ 群的不可约表示

5.3.1 $SO(3)$ 群的单值与双值表示

如前所述, $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 群间存在着同态对应关系 $R_U \Leftrightarrow \pm U$. 由 (5.51) 式知, 当 l 取正整数时, $D^{(l)}(\pm U) = D^{(l)}(U)$, 即此时的元素 U 与 $-U$ 具有相同的表示矩阵, 这样

$$\begin{gathered} D^{(l)}(\pm U)\, D^{(l)}(\pm U') = D^{(l)}(U)\, D^{(l)}(\pm U') = D^{(l)}(\pm UU'), \\ \Updownarrow \\ D^{(l)}(R_U)\, D^{(l)}(R_{U'}) = D^{(l)}(R_{UU'}). \end{gathered} \tag{5.52}$$

保持乘法规则不变, 所以表示 (5.42) 也是 $SO(3)$ 群的表示, 称为 $SO(3)$ 群的单值 (single-valued) 表示. 当 l 取正半奇数时, (5.51) 式表明 $D^{(l)}(\pm U) = \pm D^{(l)}(U)$, 即元素 U 与 $-U$ 的表示矩阵差了一个负号, 这时

$$\begin{gathered} D^{(l)}(\pm U)\, D^{(l)}(\pm U') = \pm D^{(l)}(U)\, D^{(l)}(\pm U') = \pm D^{(l)}(\pm UU'), \\ \Updownarrow \\ D^{(l)}(R_U)\, D^{(l)}(R_{U'}) = \pm D^{(l)}(R_{UU'}). \end{gathered} \tag{5.53}$$

由于负号的存在, 乘法不变规则不再满足. 所以严格来说, 此时的 (5.42) 式不再是 $SO(3)$ 群的表示. 但是习惯上人们将乘法不变规则加以推广使之可以相差一个正负号, 这样 (5.42) 式仍可视为 $SO(3)$ 群的表示, 称为 $SO(3)$ 的双值 (double-valued) 表示.

5.3.2 $SO(3)$ 群不可约表示的欧拉角描述

如上所述, $SU(2)$ 的不可约表示 (5.42) 式构成 $SO(3)$ 群的单值或双值表示. 将其中的群参数 a 与 b 按 (5.33) 式作变换, 可得 $SO(3)$ 群不可约表示矩阵的欧拉角形式

$$\begin{aligned} D^{(l)}_{m'm}(R) &= D^{(l)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \\ &= \sum_{k=0}^{l+m} (-1)^k \frac{[(l-m')!\,(l+m')!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k)!\,(m'-m+k)!k!\,(l+m-k)!} \\ &\quad \times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m-m'-2k} \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(m'\alpha+m\gamma\right)}, \end{aligned} \tag{5.54a}$$

其中

$$m', m = l, l-1, \cdots, -l; l \text{ 取半正整数或零}. \tag{5.54b}$$

如上所述, 当 l 取正整数或正半奇数时, (5.54) 式分别是 $SO(3)$ 群的单值或双值表示.

5.3.3 $D^{(l)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 的几种简单表达式

这里将给出几种简单情况下 $D^{(l)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 的具体表达式.

(1) 当 $m'=l$ 时, 由于 (5.54a) 式中 $(l-m'-k)!$ 项的存在, 只有当 $k=0$ 时不为零, 这样

$$D^{(l)}_{lm}(\alpha,\beta,\gamma)=\left[\frac{(2l)!}{(l+m)!\,(l-m)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{l+m}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{l-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l\alpha+m\gamma)}. \quad (5.55)$$

(2) 当 $m'=-l$ 时, 由于 (5.54a) 式中 $(m'-m+k)!$ 项的存在, 只有当 $k=l+m$ 时不为零, 所以

$$D^{(l)}_{-lm}(\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^{l+m}\left[\frac{(2l)!}{(l+m)!\,(l-m)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{l-m}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{l+m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\alpha-m\gamma)}. \quad (5.56)$$

(3) 当 $l=0$ 时, 由于 (5.54a) 式中 $(l-m)!$、$(l-m')!$ 与 $(l-m'-k)!$ 或 $(l+m-k)!$ 各项的存在, $m'=m=k=0$, 因此

$$D^{(0)}(\alpha,\beta,\gamma)=1. \quad (5.57)$$

(4) 当 $l=1/2$ 时,

$$D^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{array}{c} m'\backslash m \\ 1/2 \\ -1/2 \end{array}\begin{array}{c} \quad 1/2 \qquad\qquad\qquad -1/2 \\ \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)} & -\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)} \\ \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)} & \cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix}\end{array}. \quad (5.58)$$

如按 (5.54a) 式

$$\begin{aligned} D^{(1/2)}_{1/2\ 1/2}(\alpha,\beta,\gamma)&=\sum_k(-1)^k\frac{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)!\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k\right)!\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+k\right)!k!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-k\right)!} \\ &\quad\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2k}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)} \\ &=\sum_k(-1)^k\frac{1}{(-k)!k!k!\,(1-k)!}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{1-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2k}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}}(\alpha+\gamma) \\ &\xlongequal{k=0}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha+\gamma)}. \end{aligned}$$

再如

$$
\begin{aligned}
&D^{(1/2)}_{1/2\ -1/2}(\alpha,\beta,\gamma)\\
=&\sum_k(-1)^k\frac{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)!\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k\right)!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+k\right)!k!\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k\right)!}\\
&\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2k}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}\\
=&\sum_k(-1)^k\frac{1}{(-k)!\,(1+k)!k!\,(-k)!}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{1+2k}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}\\
\xlongequal{k=0}&-\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha-\gamma)}.
\end{aligned}
$$

同样的方法可求得其他矩阵元, 有兴趣的读者可自求之.

(5) 当 $l=1$ 时, 其表示矩阵为

$$
\begin{array}{cc}
 & m'\setminus m \quad\quad 1 \quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad\quad\quad -1\\
D^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)= & \begin{array}{c}1\\0\\-1\end{array}\left(\begin{array}{ccc}
\frac{1+\cos\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)} & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} & \frac{1-\cos\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)}\\
\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\\
\frac{1-\cos\beta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)} & \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} & \frac{1+\cos\beta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}
\end{array}\right).
\end{array}
\tag{5.59}
$$

如按 (5.54a) 式

$$
\begin{aligned}
D^{(1)}_{11}(\alpha,\beta,\gamma)=&\sum_k(-1)^k\frac{[(1-1)!\,(1+1)!\,(1-1)!\,(1+1)!]^{\frac{1}{2}}}{(1-1-k)!\,(1-1+k)!k!\,(1+1-k)!}\\
&\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\times1+1-1-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{1-1+2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}\\
=&\sum_k(-1)^k\frac{2}{(-k)!k!k!\,(2-k)!}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}\\
\xlongequal{k=0}&\cos^2\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}\\
=&\frac{1+\cos\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)}.
\end{aligned}
$$

再如

$$\begin{aligned}
D^{(1)}_{10}(\alpha,\beta,\gamma) &= \sum_k (-1)^k \frac{[(1-1)!\,(1+1)!\,(1-0)!\,(1+0)!]^{\frac{1}{2}}}{(1-1-k)!\,(1-0+k)!k!\,(1+0-k)!} \\
&\quad\times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\times1+0-1-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{1-0+2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\
&= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{(-k)!\,(1+k)!k!\,(1-k)!}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{1-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{1+2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha} \\
&\xlongequal{k=0} -\sqrt{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\
&= -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}.
\end{aligned}$$

又如

$$\begin{aligned}
D^{(1)}_{1-1}(\alpha,\beta,\gamma) &= \sum_k (-1)^k \frac{[(1-1)!\,(1+1)!\,(1+1)!\,(1-1)!]^{\frac{1}{2}}}{(1-1-k)!\,(1+1+k)!k!\,(1-1-k)!} \\
&\quad\times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\times1-1-1-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{1+1+2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)} \\
&= \sum_k (-1)^k \frac{2}{(-k)!\,(2+k)!k!\,(-k)!}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2+2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(\alpha-\gamma)} \\
&\xlongequal{k=0} \sin^2\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)} \\
&= \frac{1-\cos\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)}.
\end{aligned}$$

同样的方法可求得其他矩阵元, 有兴趣的读者可自求之.

5.3.4　$D^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 与 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 的等价性

$SO(3)$ 群的不可约表示 $D^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 与其自身表示 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 是等价的, 即

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = MD^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)M^{-1}, \tag{5.60a}$$

其中

$$M = \begin{array}{c} m'\setminus m \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}\ (\text{列标 } m = 1,\ 0,\ -1), \quad M^{-1} = M^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.60b}$$

例如, 若在 (5.59) 式中取 $\beta=\gamma=0$, 得

$$D^{(1)}(\alpha,0,0)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\end{pmatrix}, \tag{5.61}$$

则

$$\begin{aligned}&MD^{(1)}(\alpha,0,0)M^{-1}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2} & \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2} & 0\\ -\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2} & \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

亦即

$$MD^{(1)}(\alpha,0,0)M^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=R_z(\alpha), \tag{5.62}$$

同样可证明

$$MD^{(1)}(0,\beta,0)M^{-1}=R_y(\beta), \tag{5.63a}$$

其中

$$D^{(1)}(0,\beta,0)=\begin{pmatrix}\dfrac{1+\cos\beta}{2} & -\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \dfrac{1-\cos\beta}{2}\\ \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \cos\beta & -\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1-\cos\beta}{2} & \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & \dfrac{1+\cos\beta}{2}\end{pmatrix}, \tag{5.63b}$$

$$R_y(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix}. \tag{5.63c}$$

对于转动

$$\begin{aligned}R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_z(\alpha)\,R_y(\beta)\,R_z(\gamma)\\ &= MD^{(1)}(\alpha,0,0)\,M^{-1}MD^{(1)}(0,\beta,0)\,M^{-1}MD^{(1)}(\gamma,0,0)\,M^{-1}\\ &= MD^{(1)}(\alpha,0,0)\,D^{(1)}(0,\beta,0)\,D^{(1)}(\gamma,0,0)\,M^{-1},\end{aligned}$$

容易证明

$$D^{(1)}(\alpha,0,0)\,D^{(1)}(0,\beta,0)\,D^{(1)}(\gamma,0,0) = D^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)\,,$$

所以

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = MD^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)\,M^{-1}, \tag{5.64}$$

表明不可约表示 $D^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 与自身表示 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 等价, 所以二者是同一表示在不同坐标系中的不同形式. $D^{(1)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 是在基矢为

$$\eta_{lm}(x_1,x_2)\,|_{l=1} = [\eta_{11}(x_1,x_2)\,,\eta_{10}(x_1,x_2)\,,\eta_{1-1}(x_1,x_2)] \tag{5.65}$$

的坐标系中的表达式, 而 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 是在直角坐标系中的形式.

5.3.5 绕 y 轴转动的表示矩阵

由 (5.54a) 式知, 绕 y 轴转动的表示矩阵元为

$$\begin{aligned}d^{(l)}_{m'm}(\beta) = D^{(l)}_{m'm}(0,\beta,0) &= \sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k\,\frac{[(l-m')!\,(l+m')!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k)!\,(m'-m+k)!k!\,(l+m-k)!}\\ &\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m-m'-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2k},\end{aligned} \tag{5.66}$$

$d^{(l)}(\beta)$ 是群元素 $R_y(\beta)\in SO(3)$ 的表示矩阵, 是实矩阵. $d^{(l)}(\beta)$ 与 $D^{(l)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 之间显然有关系

$$D^{(l)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = d^{(l)}_{m'm}(\beta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(m'\alpha+m\gamma\right)}. \tag{5.67}$$

由 (5.66) 与 (5.67) 式, 并注意到 $d^{(l)}(\beta)$ 的实数性, 可证明如下各对称关系：

$$\begin{aligned}d^{(l)}_{m'm}(\beta) &= d^{(l)}_{-m-m'}(\beta) = (-1)^{m'-m}\,d^{(l)}_{m'm}(-\beta) = (-1)^{m'-m}\,d^{(l)}_{mm'}(\beta)\\ &= d^{(l)}_{mm'}(-\beta) = (-1)^{m'-m}\,d^{(l)}_{-m'-m}(\beta)\,,\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$d^{(l)}_{m'm}(\pm\pi) = (-1)^{l\pm m'}\,\delta_{m'-m}, \tag{5.69}$$

$$d^{(l)}_{m'm}(2\pi) = (-1)^{2l}\,\delta_{m'm}, \tag{5.70}$$

$$d^{(l)}_{m'm}(\pi\pm\beta) = (-1)^{l+m'}\,d^{(l)}_{\mp m'\pm m}(\beta)\,, \tag{5.71}$$

$$D^{(l)*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^{m'-m}D^{(l)}_{-m'-m}(\alpha,\beta,\gamma), \tag{5.72}$$

$$D^{(l)}_{m'm}(-\gamma,-\beta,-\alpha)=D^{(l)*}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma). \tag{5.73}$$

例 5.1　证明 (5.68) 各等式.

证明　由 (5.66) 式知

$$\begin{aligned}d^{(l)}_{-m-m'}(\beta)=&\sum_k(-1)^k\frac{[(l+m)!\,(l-m)!\,(l+m')!\,(l-m')!]^{\frac{1}{2}}}{(l+m-k)!\,(-m+m'+k)!k!\,(l-m'-k)!}\\&\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l-m'+m-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-m+m'+2k}\\=&d^{(l)}_{m'm}(\beta),\quad\Rightarrow (5.68)\text{式第 1 等式得证}.\end{aligned}$$

另

$$\begin{aligned}d^{(l)}_{m'm}(-\beta)=&\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k\frac{[(l-m')!\,(l+m')!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k)!\,(m'-m+k)!k!\,(l+m-k)!}\\&\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m-m'-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2k}(-1)^{m'-m}\\=&(-1)^{m'-m}d^{(l)}_{m'm}(\beta),\quad\Rightarrow (5.68)\text{第 2 等式得证}.\end{aligned}$$

再

$$\begin{aligned}d^{(l)}_{mm'}(\beta)=&\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k\frac{[(l-m)!\,(l+m)!\,(l-m')!\,(l+m')!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m-k)!\,(m-m'+k)!k!\,(l+m'-k)!}\\&\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m'-m-2k}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m-m'+2k}\\\xlongequal{k=k'+m'-m}&(-1)^{m'-m}\sum_{k'=m-m'}^{l+2m-m'}(-1)^{k'}\\&\times\frac{[(l-m)!\,(l+m)!\,(l-m')!\,(l+m')!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k')!\,(k')!\,(m'-m+k')!\,(l+m-k')!}\\&\times\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m-m'-2k'}\left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2k'}.\end{aligned}$$

由于 $k'!$ 的存在, $k'\geqslant 0$. 由求和下限 $k'=m-m'$ 知, $m'_{\max}=m,\Rightarrow k'_{\min}=0$. 而与之对应的 $k'_{\max}=l+2m-m=l+m$, 所以

$$d^{(l)}_{mm'}(\beta)=(-1)^{m'-m}d^{(l)}_{m'm}(\beta),\quad\Rightarrow (5.68)\text{第 3 等式得证}.$$

由 (5.68) 的第 2 与第 3 等式知

$$d^{(l)}_{m'm}(\beta)=d^{(l)}_{mm'}(-\beta)\,,\quad \Rightarrow (5.68)\text{第 4 等式得证.}$$

再由 (5.68) 式知

$$d^{(l)}_{m'm}(\beta)=d^{(l)}_{-m-m'}(\beta)=(-1)^{m'-m}\,d^{(l)}_{mm'}(\beta)\,,$$

故

$$d^{(l)}_{-m-m'}(\beta)=(-1)^{m'-m}\,d^{(l)}_{-m'-m}(\beta)\,,\quad \Rightarrow (5.68)\text{第 5 等式得证.}$$

例 5.2 证明 (5.69)~(5.71) 式.

证明 若 $\beta=\pi$, 由于 (5.66) 式中 $\cos(\beta/2)$ 的存在

$$2l+m-m'-2k=0,\quad \Rightarrow k=l+\frac{m-m'}{2}, \tag{5.74}$$

这样, (5.66) 式中的阶乘因子

$$\left.\begin{aligned}(l-m'-k)!&=\left(-\frac{m'+m}{2}\right)!\\ (l+m-k)!&=\left(\frac{m'+m}{2}\right)!\end{aligned}\right\},\quad \Rightarrow m'+m=0, \tag{5.75}$$

$$\xrightarrow{(5.74)\text{与}(5.75)\text{式}} k=l-m', \tag{5.76}$$

将 (5.76) 代入 (5.66) 式, 并注意到该式中 $\sin(-\beta/2)$ 的贡献, 得

$$\begin{aligned}d^{(l)}_{m'm}(\pi)&=(-1)^{k+m'-m+2k}\Big|_{k=l-m'}\delta_{m'-m}=(-1)^{3l-m'}\,\delta_{m'-m}\\ &=(-1)^{4l-l-m'}\,\delta_{m'-m},\end{aligned}$$

注意到 $4l$ 为偶数, $l+m'$ 为正整数或零, 上式变为

$$d^{(l)}_{m'm}(\pi)=(-1)^{l+m'}\,\delta_{m'-m}. \tag{5.77}$$

再由 (5.68) 式知

$$d^{(l)}_{m'm}(-\pi)=d^{(l)}_{mm'}(\pi)\xlongequal{(5.77)\text{式}}(-1)^{l+m}\,\delta_{m-m'},$$

或

$$d^{(l)}_{m'm}(-\pi)=(-1)^{l-m'}\,\delta_{m'-m}, \tag{5.78}$$

(5.77)+(5.78) 式, (5.69) 式得证.

当 $\beta = 2\pi$ 时, 由于 (5.66) 式中 $\sin(-\beta/2)$ 的存在

$$m' - m + 2k = 0, \quad \Rightarrow k = -\frac{m'-m}{2}, \tag{5.79}$$

这样, (5.66) 式中的阶乘因子

$$\left.\begin{aligned} k! &= \left(-\frac{m'-m}{2}\right)! \\ (m'-m+k)! &= \left(\frac{m'-m}{2}\right)! \end{aligned}\right\}, \quad \Rightarrow m' - m = 0, \tag{5.80}$$

$$\xrightarrow{(5.79)\text{与}(5.80)\text{式}} k = 0. \tag{5.81}$$

注意到 (5.66) 式中 $\cos(\beta/2)$ 的存在, (5.66) 式变为

$$d^{(l)}_{m'm}(2\pi) = (-1)^{2l}\,\delta_{m'm}, \quad \Rightarrow (5.70)\text{式得证}.$$

当 $\beta \Rightarrow \pi+\beta$ 时, 可看成是转角分别为 π 与 β 的连续两次操作, 其表示矩阵为各表示矩阵的乘积, 即

$$d^{(l)}_{m'm}(\pi+\beta) = \sum_{m''} d^{(l)}_{m'm''}(\pi)\, d^{(l)}_{m''m}(\beta) \xlongequal{(5.69)\text{式}} \sum_{m''} (-1)^{l+m'}\,\delta_{m'-m''} d^{(l)}_{m''m}(\beta),$$

亦即

$$d^{(l)}_{m'm}(\pi+\beta) = (-1)^{l+m'}\, d^{(l)}_{-m'm}(\beta). \tag{5.82}$$

同理

$$\begin{aligned} d^{(l)}_{m'm}(\pi-\beta) &= \sum_{m''} d^{(l)}_{m'm''}(\pi)\, d^{(l)}_{m''m}(-\beta) \\ &\xlongequal{(5.68)\text{与}(5.69)\text{式}} \sum_{m''} (-1)^{l+m'}\,\delta_{m'-m''} d^{(l)}_{mm''}(\beta), \end{aligned}$$

或

$$d^{(l)}_{m'm}(\pi-\beta) = (-1)^{l+m'}\, d^{(l)}_{m-m'}(\beta) \xlongequal{(5.68)\text{式}} (-1)^{l+m'}\, d^{(l)}_{m'-m}(\beta). \tag{5.83}$$

(5.82)+(5.83) 式, (5.71) 式得证.

例 5.3 证明 (5.72)~(5.73) 式.

证明 注意到 $d^{(l)}(\beta)$ 的实数性, 由 (5.67) 式得

$$D^{(l)*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = d^{(l)}_{m'm}(\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m'\alpha+m\gamma\right)}$$

$$\xlongequal{(5.68)\text{第 5 等式}} (-1)^{m'-m}\, d^{(l)}_{-m'-m}(\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m'\alpha+m\gamma\right)}$$
$$= (-1)^{m'-m}\, D^{(l)}_{-m'-m}(\alpha,\beta,\gamma)\,, \quad \Rightarrow (5.72)\text{式得证}.$$

再

$$D^{(l)}_{m'm}(-\gamma,-\beta,-\alpha) = d^{(l)}_{m'm}(-\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m'\gamma+m\alpha\right)}$$
$$\xlongequal{(5.68)\text{第 4 等式}} d^{(l)}_{mm'}(\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(m\alpha+m'\gamma\right)}$$
$$= D^{(l)*}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)\,, \quad \Rightarrow (5.73)\text{式得证}.$$

5.3.6　$SO(3)$ 群不可约表示直积的分解

$SO(3)$ 群的两个不可约表示的直积仍然是它的表示. 由 2.7 节的讨论知, 两不可约表示的直积一般不再是不可约的, 它们可按克莱布施–戈登分解式, 展成为一系列不可约表示的直和. 即

$$D^{(l_1)}(R)\otimes D^{(l_2)}(R) = \sum_l{}^{\oplus} a_l D^{(l)}(R), \tag{5.84}$$

其中 a_l 为不可约表示 $D^{(l)}(R)$ 出现的次数, 下面来确定这种分解形式.

1. $SO(3)$ 群不可约表示的特征标

在讨论 $SO(3)$ 群表示的特征标之前, 先证明结论：绕通过同一点的任意转轴转动相同角度的操作属于同一类.

证明　设 $R_\zeta(\alpha)$ 为绕过原点 O 的 ζ 轴、转角为 α 的转动, 如图 5.1 所示.

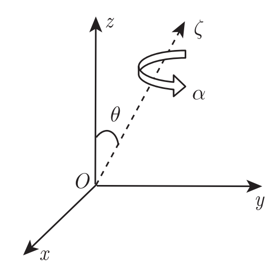


图 5.1　绕过原点 O 的 ζ、转角为 α 的转动

为简单起见, 假设 ζ 轴在 yOz 平面内, 上述转动可通过下述步骤来实现：

(1) 绕 x 轴转 $-\theta$ 角, ζ 与 z 轴重合, 该转动为 $R_x(-\theta) = R_x^{-1}(\theta)$.

(2) 绕 z 轴转 α 角, 该转动为 $R_z(\alpha)$.

(3) 再将 ζ 轴绕 x 轴转 θ 角回到原处, 该转动为 $R_x(\theta)$.

这样

$$R_\zeta(\alpha) = R_x(\theta)\, R_z(\alpha)\, R_x^{-1}(\theta)\,. \tag{5.85}$$

按类的定义, 上式中的 $R_\zeta(\alpha)$ 与 $R_z(\alpha)$ 属于同一类. 由于这里 ζ 轴的选取是任意的, 因此得结论：绕通过同一点的任意转轴转动相同角度的操作属于同一类, 它们相应的表示具有相同的特征标. 这样, 只要知道了过原点 O 某一轴转动某一角度不可约表示的特征标, 也就知道了绕过原点 O 任意轴转动相同角度不可约表示的特征标.

由 (5.45) 式知, 绕 z 轴转动 α 角的不可约表示为

$$D^{(l)}_{m'm}(0,0,\alpha)=\delta_{m'm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}. \tag{5.86}$$

这样, 由上面的讨论知, $SO(3)$ 群绕过原点 O 任意轴转过 α 角的不可约表示的特征标为

$$\begin{aligned}\chi_l&=\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}\xlongequal{k=l-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\alpha}\sum_{k=0}^{2l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\alpha}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2l+1)\alpha}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l+1/2)\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1/2)\alpha}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}},\end{aligned}$$

亦即

$$\chi_l=\frac{\sin[(l+1/2)\alpha]}{\sin(\alpha/2)}. \tag{5.87}$$

2. $SO(3)$ 群不可约表示直积的分解

为了求得 (5.84) 式中直积分解的系数, 求表示直积 $D^{(l_1)}(R)\otimes D^{(l_2)}(R)$ 的特征标

$$\begin{aligned}\chi&=\chi\left[D^{(l_1)}(R)\otimes D^{(l_2)}(R)\right]\\&=\chi\left[D^{(l_1)}(R)\right]\chi\left[D^{(l_2)}(R)\right]\\&=\chi_{l_1}\chi_{l_2}\\&=\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_1\alpha}\sum_{m_2=-l_2}^{l_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_2\alpha}\\&=\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}\sum_{m_2=-l_2}^{l_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1+m_2)\alpha}\\&\xlongequal{m=m_1+m_2}\sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha},\end{aligned}$$

其中

$$l_{\min}=|l_1-l_2|,\quad l_{\max}=l_1+l_2.$$

注意到

$$\chi_l = \sum_{m=-l}^{l} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha},$$

则

$$\chi\left[D^{(l_1)}(R) \otimes D^{(l_2)}(R)\right] = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \chi_l. \tag{5.88}$$

另由 (5.84) 式知

$$\chi\left[D^{(l_1)}(R) \otimes D^{(l_2)}(R)\right] = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} a_l \chi_l. \tag{5.89}$$

比较 (5.88) 与 (5.89) 两式知

$$\begin{aligned} &a_l = 1, \quad l = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \cdots, |l_1 - l_2|, \\ &a_l = 0, \quad \text{其他情况}. \end{aligned} \tag{5.90}$$

表明, 在表示的直积 $D^{(l_1)}(R) \otimes D^{(l_2)}(R)$ 中, 不可约表示

$$D^{(l)}(R) \quad (l = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \cdots, |l_1 - l_2|) \tag{5.91}$$

仅出现一次, 即表示的直积有如下分解:

$$D^{(l_1)}(R) \otimes D^{(l_2)}(R) = D^{|l_1-l_2|}(R) \oplus D^{|l_1-l_2|+1}(R) \oplus \cdots \oplus D^{(l_1+l_2)}(R),$$

或

$$D^{(l_1)}(R) \otimes D^{(l_2)}(R) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \oplus D^{(l)}(R). \tag{5.92}$$

如

$$D^{(1/2)}(R) \otimes D^{(1)}(R) = D^{(1/2)}(R) \oplus D^{(3/2)}(R),$$

$$D^{(1)}(R) \otimes D^{(2)}(R) = D^{(1)}(R) \oplus D^{(2)}(R) \oplus D^{(3)}(R).$$

5.4　坐标转动变换下场的变换与轨道角动量算符的本征值方程

物理学中有标量场、矢量场、张量场与旋量场之分. 例如, 静电场中的电势 $\phi(r)$ 是标量场; 电磁场强 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 及矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 都是矢量场; 电磁场中的麦克斯韦 (Maxwell) 应力张量是二阶张量场; 考虑到自旋效应, 电子的波函数是一个二分量旋量场. 本节将给出不同场的定义及其在坐标转动变换下的变换形式; 导出标量场与 1/2 阶旋量场变换算符的欧拉角表达式; 讨论量子力学中轨道角动量算符 $\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$ 及 $\hat{L}_z$ 的本征值方程问题.

5.4.1 场的分类及其在坐标转动变换下的变换形式

1. 标量场

在空间坐标作转动 $R \in SO(3)$ 时, 若场量 $\phi(r)$ 按 $SO(3)$ 群的不可约表示 $D^{(0)}(R)$ 变换

$$\phi'(r') = D^{(0)}(R)\phi(r) = \phi(r), \tag{5.93a}$$

即 $\phi(r)$ 在空间坐标转动变换下保持不变, 则称 $\phi(r)$ 为空间转动变换下的标量场 (scalar field). 取 $\hat{P}(R)$ 为与转动 R 相应的标量场的变换算符, 按 (4.138) 式, 上式可改写成

$$\hat{P}(R)\phi(r) = \phi'(r) = \phi\left(R^{-1}r\right). \tag{5.93b}$$

2. 矢量场

若有场量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, 其分量由一个指标描述, 共三个分量 $A_i(r)\,(i=1,2,3)$[注：本章讨论的仅限于三维问题], 在 R 转动变换下, 按 $SO(3)$ 群的表示 $D^{(1)}(R)$, 或按 R 变换 [注：$D^{(1)}(R)$ 与 R 等价], 即

$$\hat{P}(R)A_i(r) = A_i'(r) = \sum_j R_{ij}A_j\left(R^{-1}r\right) \quad (i、j=1,2,3), \tag{5.94}$$

则称 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 为矢量场 (vector field), 其中 $\hat{P}(R)$ 为其变换算符.

3. l 阶张量场

设有场量 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})$, 有 l 个分量指标, 共 3^l 个分量, 即

$$T_{\underbrace{ijk\cdots}_{l\text{ 个指标}}}(r) \quad (i、j、k、\cdots=1,2,3),$$

在空间作转动 R 时, 作变换

$$\begin{aligned}\hat{P}(R)T_{ijk\cdots}(r) = T'_{ijk\cdots}(r) &= \sum_{i'j'k'\cdots} R_{ii'}R_{jj'}R_{kk'}\cdots T_{i'j'k'\cdots}\left(R^{-1}r\right)\\ &\overset{(2.49)\text{式}}{=\!=\!=} \sum_{i'j'k'\cdots}(R\otimes R\otimes\cdots R)_{ijk\cdots,i'j'k'\cdots}T_{i'j'k'\cdots}\left(R^{-1}r\right),\end{aligned} \tag{5.95}$$

则称 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})$ 为 l 阶张量场 (lth order tensor field), 或 l 阶三维张量场, 三维指每个指标有三个取数. 一般情况下, 对于 m 维空间, 每个指标将有 m 个取数, 这时的 l 个分量指标的张量场称为 l 阶 m 维张量场. 显然, 按张量场的定义, 标量场为零阶张量场, 矢量场为一阶张量场.

4. l 阶旋量场

设场量 $S_{lm}(r)$ 有 $2l+1$ 个分量, 即 $m=l,l-1,\cdots,-l$. 在空间作 R 转动时, 按 $SO(3)$ 群的表示 $D^{(l)}(R)$ 变换, 即

$$\hat{P}(R)S_{lm}(r)=S'_{lm}(r)=\sum_{m'}D^{(l)}_{mm'}(R)S_{lm'}(R^{-1}r), \tag{5.96}$$

则称 $S_{lm}(r)$ 为 l 阶旋量场 (lth order spinor field).

(1) 零阶旋量场.

零阶旋量场只有一个分量 $S_{00}(r)$, 其变换矩阵为 $D^{(0)}(R)=1$, 所以零阶旋量场即为一标量场.

(2) 一阶旋量场.

一阶旋量场有三个分量 $S_{1m}(r)\,(m=1,0,-1)$, 按下式变换

$$\hat{P}(R)S_{1m}(r)=\sum_{m'}D^{(1)}_{mm'}(R)\,S_{1\,m'}\left(R^{-1}r\right). \tag{5.97}$$

由 (5.60) 式知, $D^{(1)}(R)$ 与 R 间满足等阶关系

$$R=MD^{(1)}(R)\,M^{-1},\quad 或\quad R_{ij}=\sum_{mm'}M_{im}D^{(1)}_{mm'}(R)\,M^{-1}_{m'j}, \tag{5.98}$$

其中 M 与 M^{-1} 由 (5.60b) 式给出. 将 (5.98) 代入矢量场变换的 (5.94) 式得

$$\hat{P}(R)\,A_i(r)=\sum_j\sum_{mm'}M_{im}D^{(1)}_{mm'}(R)\,M^{-1}_{m'j}A_j\left(R^{-1}r\right),$$

上式两边同乘 M^{-1}_{ki} 并对 i 求和得

$$\begin{aligned}\hat{P}(R)\left(\sum_i M^{-1}_{ki}A_i(r)\right)&=\sum_{mm'j}D^{(1)}_{mm'}(R)\left(\sum_i M^{-1}_{ki}M_{im}\right)M^{-1}_{m'j}A_j\left(R^{-1}r\right)\\&=\sum_{mm'}D^{(1)}_{mm'}(R)\,\delta_{km}\sum_j M^{-1}_{m'j}A_j\left(R^{-1}r\right)\\&=\sum_{m'}D^{(1)}_{km'}(R)\sum_j M^{-1}_{m'j}A_j\left(R^{-1}r\right),\end{aligned} \tag{5.99}$$

上面由第一到第二等式用到了关系

$$\sum_i M^{-1}_{ki}M_{im}=\delta_{km}. \tag{5.100}$$

将 (5.99) 与 (5.97) 式相比较知

$$S_{1k}(r)=\sum_i M^{-1}_{k\,i}A_i(r), \tag{5.101}$$

或由 (5.60b) 式

$$\begin{aligned}S_{11}(r) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[A_1(r) - \mathrm{i}A_2(r)\right],\\ S_{10}(r) &= A_3(r),\\ S_{1-1}(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[A_1(r) + \mathrm{i}A_2(r)\right].\end{aligned} \tag{5.102}$$

可见, 一阶旋量场可由矢量场线性组合而成, 两者并不独立.

5.4.2　标量场与 1/2 阶旋量场变换算符的欧拉角表示

(5.93)~(5.96) 式中各场量的变换算符都用符号 $\hat{P}(R)$ 表示, 对于不同的场量, $\hat{P}(R)$ 的具体形式不同, 这里将求出标量场与 1/2 阶旋量场的函数变换算符.

1. 标量场变换算符的欧拉角表示

考虑绕 z 轴的转动, 其正交变换矩阵由 (5.2) 式给出, 为

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_z^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则由 (5.93b) 式知

$$\begin{aligned}\hat{P}(R_z)\phi(r) &= \phi\left(R_z^{-1}r\right)\\ &= \phi(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)\\ &= \phi(x', y', z'),\end{aligned} \tag{5.103a}$$

其中

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z' = z. \tag{5.103b}$$

(5.103a) 式两边对 α 求导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{P}(R_z)\phi(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\phi\left(x', y', z'\right)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial\alpha}\right)\phi(x', y', z')\\ &= \left(y'\frac{\partial}{\partial x'} - x'\frac{\partial}{\partial y'}\right)\phi(x', y', z')\\ &\xlongequal{(5.103\text{a})式} \hat{P}(R_z)\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(x,y,z).\end{aligned}$$

由于 $\phi(x,y,z)$ 是任意的, 由上式可得

$$\frac{\partial \hat{P}(R_z)}{\partial \alpha} = \hat{P}(R_z)\left(-\mathrm{i}\hat{L}_z\right),$$

其中

$$\hat{L}_z = -\mathrm{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

为轨道角动量算符的 z 分量, 于是得

$$\hat{P}(R_z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{L}_z}. \tag{5.104}$$

这就是与 $R_z(\alpha)$ 对应的函数变换算符. 由 (5.103a) 式知

$$\phi\left(R_z^{-1}r\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{L}_z}\phi(r). \tag{5.105}$$

一般情况下, 若坐标系作转动

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma),$$

与其相应的函数变换算符为

$$\hat{P}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{L}_z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\hat{L}_y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma\hat{L}_z}. \tag{5.106}$$

这就是用非正则群参数欧拉角 α、β 与 γ 表示的标量场变换算符, 与正则群参数时的 (4.143) 式一样, $\hat{P}(\alpha,\beta,\gamma)$ 也是一幺正算符. 不同的是, (5.106) 式中 e 的各指数因子不能相加求和, 这在量子力学中早已熟知.

2. 1/2 阶旋量场变换算符的欧拉角表示

在 $R \in SO(3)$ 的坐标转动变换下, 旋量场按 (5.96) 式变换, 即

$$\hat{P}(R)\begin{pmatrix} S_{1/2\quad 1/2}(r) \\ S_{1/2\quad -1/2}(r) \end{pmatrix} = D^{(1/2)}(R)\begin{pmatrix} S_{1/2\quad 1/2}\left(R^{-1}r\right) \\ S_{1/2\quad -1/2}\left(R^{-1}r\right) \end{pmatrix}, \tag{5.107}$$

设 R 是绕 z 轴作转角为 α 的转动, 由 (5.105) 式知

$$\begin{aligned} S_{1/2\quad 1/2}\left(R_z^{-1}r\right) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{L}_z}S_{1/2\quad 1/2}(r), \\ S_{1/2\quad -1/2}\left(R_z^{-1}r\right) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{L}_z}S_{1/2\quad -1/2}(r). \end{aligned} \tag{5.108}$$

这样 (5.107) 式变为

$$\hat{P}(R_z)\begin{pmatrix} S_{1/2\quad 1/2}(r) \\ S_{1/2\quad -1/2}(r) \end{pmatrix} = D^{(1/2)}(R_z)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{L}_z}\begin{pmatrix} S_{1/2\quad 1/2}(r) \\ S_{1/2\quad -1/2}(r) \end{pmatrix}.$$

另由 (5.58) 式知

$$D^{(1/2)}(R_z) = D^{(1/2)}(\alpha,0,0) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\alpha} \end{pmatrix} = \sum_k \frac{\left(-\frac{i}{2}\alpha\right)^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^k$$

$$= \sum_k \frac{\left(-\frac{i}{2}\alpha\sigma_z\right)^k}{k!} = e^{-\frac{i}{2}\alpha\sigma_z},$$

这样

$$\hat{P}(R_z)\begin{pmatrix} S_{1/2} \quad {}_{1/2}(r) \\ S_{1/2} \quad {}_{-1/2}(r) \end{pmatrix} = e^{-i\alpha\left(\hat{L}_z + \frac{1}{2}\sigma_z\right)}\begin{pmatrix} S_{1/2} \quad {}_{1/2}(r) \\ S_{1/2} \quad {}_{-1/2}(r) \end{pmatrix},$$

即

$$\hat{P}(R_z) = e^{-i\alpha\hat{J}_z}, \tag{5.109a}$$

其中

$$\hat{J}_z = \hat{L}_z + \frac{1}{2}\sigma_z, \tag{5.109b}$$

是总角动量算符的 z 分量.

一般情况下, 相应于转动 $R(\alpha,\beta,\gamma)$, 1/2 阶旋量场的变换算符为

$$\hat{P}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha\hat{J}_z}e^{-i\beta\hat{J}_y}e^{-i\gamma\hat{J}_z}, \tag{5.110}$$

其中的 $\hat{J}_y = \hat{L}_y + 1/2\sigma_y$ 是总角动量算符的 y 分量. (5.110) 与 (5.106) 式在形式上相一致, 只是由于自旋的存在, 角动量算符中多了自旋算符部分.

5.4.3 轨道角动量算符的本征值方程

由 (5.39) 式知

$$\hat{P}(R)\eta_{lm}(x_1,x_2) = \eta_{lm}(x_1',x_2') = \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{m'm}(R)\eta_{lm'}(x_1,x_2),$$

其中 $\eta_{lm}(x_1,x_2)$ 是任意二维空间 (x_1,x_2) 的函数, 构成 $SO(3)$ 群表示空间的基矢, 将其换成球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$, 上式变为

$$\hat{P}(R)Y_{lm}(\theta,\phi) = Y_{lm}(\theta',\phi') = \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)Y_{lm'}(\theta,\phi). \tag{5.111}$$

1. $D^{(l)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 与 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 间的关系

为了得到该关系, 在 (5.111) 式中取 $\theta'=\phi'=0$, 则此时 (5.111) 式的

$$Y_{lm}(0,0)=\begin{cases}0 & (m\neq 0),\\ \sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}} & (m=0).\end{cases} \tag{5.112}$$

又 $\alpha=\phi,\beta=\theta$, 且由 (5.54a) 式知, 当 $m=0$ 时, $D^{(l)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 中的 γ 项不存在, 这样 (5.111) 式变为

$$\sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{m'0}(\phi,\theta,0)\,Y_{lm'}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \tag{5.113}$$

另, 球谐函数满足相加性定理

$$\sum_{m'=-l}^{l} Y^{*}_{lm'}(\theta,\phi)\,Y_{lm'}(\theta,\phi)=\frac{2l+1}{4\pi}. \tag{5.114}$$

(5.113) 与 (5.114) 式比较, 得关系

$$D^{(l)}_{m0}(\phi,\theta,0)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^{*}_{lm}(\theta,\phi), \tag{5.115a}$$

或

$$D^{(l)}_{m0}(\alpha,\beta,0)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y^{*}_{lm}(\beta,\alpha). \tag{5.115b}$$

这就是不可约表示 $D^{(l)}(\alpha,\beta,\gamma)$ 与球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 之间的关系.

2. $\hat{L}_x$ 的本征值方程

考虑绕 x 轴转角为 $\varepsilon\Rightarrow 0$ 的转动, 若不考虑自旋角动量, 则相应的函数变换算符由 (5.104) 式给出, 为

$$\hat{P}(R_x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\hat{L}_x}\simeq 1-\mathrm{i}\varepsilon\hat{L}_x. \tag{5.116}$$

该转动亦可通过欧拉角分别为 $\alpha=-\pi/2$、$\beta=\varepsilon$ 与 $\gamma=\pi/2$ 的转动来实现, 由 (5.54a) 式知

$$\begin{aligned}D^{(l)}_{m'm}\left(-\frac{\pi}{2},\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right)=&\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k\frac{[(l-m')!\,(l+m')!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k)!\,(m'-m+k)!k!\,(l+m-k)!}\\&\times\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2l+m-m'-2k}\left(-\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m'-m+2k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(m'-m)},\end{aligned}$$

亦即

$$D^{(l)}_{m'm}(R_x) \xlongequal{\varepsilon\Rightarrow 0} \sum_{k=0}^{l+m} (-1)^k \frac{[(l-m')!\,(l+m')!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k)!\,(m'-m+k)!k!\,(l+m-k)!} \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m'-m+2k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(m'-m)}. \tag{5.117}$$

在 $\varepsilon \Rightarrow 0$ 时, 展开式只保留 ε 的零级与一级项, 则

$$m'-m+2k=0, \quad 或 \quad m'-m+2k=1. \tag{5.118}$$

(1) 当 $m'-m+2k=0$, 亦即 $m'-m=-2k$ 时, $m'-m+k=-k\geqslant 0$(阶乘要求), 故 $k=0$, 或 $m'=m$, 而

$$D^{(l)}_{mm}(R_x)=1. \tag{5.119}$$

(2) 当 $m'-m+2k=1$, 或 $m'-m=-2k+1$ 时, 由于 $m'-m+k=-k+1\geqslant 0$(阶乘要求), 且 $k\geqslant 0$, 故 $k=0,1$.

当 $k=0$ 时, $m'-m=1$, 或 $m'=m+1$, 则由 (5.117) 式知

$$\begin{aligned} D^{(l)}_{m+1\ m}(R_x) &= \frac{[(l-m-1)!\,(l+m+1)!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m-1)!\,(l+m)!}\left(-\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\right) \\ &= [(l+m+1)\,(l-m)]^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.120}$$

当 $k=1$ 时, $m'-m=-1$, 即 $m'=m-1$, 则由 (5.117) 式得

$$\begin{aligned} D^{(l)}_{m-1\ m}(R_x) &= -\frac{[(l-m+1)!\,(l+m-1)!\,(l-m)!\,(l+m)!]^{\frac{1}{2}}}{(l-m)!\,(l+m-1)!}\left(\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= [(l-m+1)\,(l+m)]^{\frac{1}{2}}\left(-\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.121}$$

将 (5.116) 与 (5.119)~(5.121) 式代入 (5.111) 式得

$$\begin{aligned} &\left(1-\mathrm{i}\varepsilon\hat{L}_x\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \\ =&Y_{lm}(\theta,\phi)-\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\{[(l+m+1)\,(l-m)]^{\frac{1}{2}}\,Y_{lm+1}(\theta,\phi) \\ &+[(l-m+1)\,(l+m)]^{\frac{1}{2}}\,Y_{lm-1}(\theta,\phi)\}, \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \hat{L}_xY_{lm}(\theta,\phi) =& \frac{1}{2}[(l+m+1)\,(l-m)]^{\frac{1}{2}}\,Y_{lm+1}(\theta,\phi) \\ &+\frac{1}{2}[(l-m+1)\,(l+m)]^{\frac{1}{2}}\,Y_{lm-1}(\theta,\phi), \end{aligned} \tag{5.122}$$

这正是量子力学中熟知的 $\hat{L}_x$ 的本征值方程.

3. $\hat{L}_y$ 的本征值方程

考虑绕 y 轴转角为 $\varepsilon \Rightarrow 0$ 的转动, 由 (5.104) 式知, 其相应的函数变换算符为

$$\hat{P}\left(R_y\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon \hat{L}_y} \simeq 1-\mathrm{i}\varepsilon \hat{L}_y. \tag{5.123}$$

与该转动相应的欧拉角分别为 $\alpha=0$、$\beta=\varepsilon$ 与 $\gamma=0$, 将其代入 (5.54a) 式得

$$\begin{aligned} D_{m'm}^{(l)}(0,\varepsilon,0)= & \sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k \frac{\left[\left(l-m'\right)!\left(l+m'\right)!(l-m)!(l+m)!\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(l-m'-k\right)!\left(m'-m+k\right)!k!(l+m-k)!} \\ & \times\left(\cos \frac{\varepsilon}{2}\right)^{2l+m-m'-2k}\left(-\sin \frac{\varepsilon}{2}\right)^{m'-m+2k}, \end{aligned} \tag{5.124}$$

亦即

$$\begin{aligned} & D_{m'm}^{(l)}(0,\varepsilon,0) \\ & \xlongequal{\varepsilon \Rightarrow 0} \sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k \frac{\left[\left(l-m'\right)!\left(l+m'\right)!(l-m)!(l+m)!\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(l-m'-k\right)!\left(m'-m+k\right)!k!(l+m-k)!}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m'-m+2k}. \end{aligned} \tag{5.125}$$

由于 $\varepsilon \Rightarrow 0$, 展开式只保留 ε 的零级与一级项, 有

$$m'-m+2k=0, \quad \text{或} \quad m'-m+2k=1. \tag{5.126}$$

(1) 当 $m'-m+2k=0$, 亦即 $m'-m=-2k$ 时, 由于 $m'-m+k=-k \geqslant 0$(阶乘要求), 且 $k \geqslant 0$, 故 $k=0$ 或 $m'=m$, 则

$$D_{mm}^{(l)}\left(R_y\right)=1. \tag{5.127}$$

(2) 当 $m'-m+2k=1$ 或 $m'-m=-2k+1$ 时, 由于 $m'-m+k=-k+1 \geqslant 0$(阶乘要求), 且 $k \geqslant 0$, 故 $k=0$ 或 $k=1$.

当 $k=0$ 时, $m'=m+1$, 由上面同样的讨论知

$$D_{m+1\ m}^{(l)}\left(R_y\right)=[(l+m+1)(l-m)]^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{5.128}$$

当 $k=1$ 时, $m'=m-1$

$$D_{m-1\ m}^{(l)}\left(R_y\right)=[(l-m+1)(l+m)]^{\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.129}$$

将 (5.123) 与 (5.127)~(5.129) 式代入 (5.111) 式得

$$\hat{L}_y Y_{lm}(\theta,\phi)=-\frac{\mathrm{i}}{2}[(l+m+1)(l-m)]^{\frac{1}{2}} Y_{lm+1}(\theta,\phi)$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2}\left[(l-m+1)(l+m)\right]^{\frac{1}{2}} Y_{l\,m-1}(\theta,\phi), \tag{5.130}$$

这正是量子力学中熟知的 $\hat{L}_y$ 的本征值方程.

定义算符

$$\hat{L}_{\pm}=\hat{L}_x\pm\mathrm{i}\hat{L}_y, \tag{5.131}$$

则由 (5.122) 与 (5.130) 两式可得本征值方程

$$\hat{L}_{\pm}Y_{lm}(\theta,\phi)=\left[(l\pm m+1)(l\mp m)\right]^{\frac{1}{2}} Y_{lm\pm 1}(\theta,\phi), \tag{5.132a}$$

或由关系

$$\begin{aligned}[\hat{L}_{\pm},Y_{lm}(\theta,\phi)]&=\hat{L}_{\pm}Y_{lm}(\theta,\phi)-Y_{lm}(\theta,\phi)\hat{L}_{\pm}\\&=\hat{L}_{\pm}[Y_{lm}(\theta,\phi)]+Y_{lm}(\theta,\phi)\hat{L}_{\pm}-Y_{lm}(\theta,\phi)\hat{L}_{\pm}\\&=\hat{L}_{\pm}[Y_{lm}(\theta,\phi)],\end{aligned}$$

得对易关系

$$\left[\hat{L}_{\pm},Y_{lm}(\theta,\phi)\right]=\left[(l\pm m+1)(l\mp m)\right]^{\frac{1}{2}} Y_{lm\pm 1}(\theta,\phi), \tag{5.132b}$$

这也是量子力学中常见的关系之一.

4. $\hat{L}_z$ 的本征值方程

考虑绕 z 轴转角为 $\varepsilon\Rightarrow 0$ 的转动, 其函数变换算符为

$$\hat{P}(R_z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\hat{L}_z}\simeq 1-\mathrm{i}\varepsilon\hat{L}_z. \tag{5.133}$$

与之相应的三个欧拉角分别为 $\alpha=0$、$\beta=0$ 与 $\gamma=\varepsilon$. 将其代入 (5.54a) 式得

$$\begin{aligned}&D^{(l)}_{m'm}(0,0,\varepsilon)\\&=\sum_{k=0}^{l+m}(-1)^k\frac{\left[(l-m')!\,(l+m')!\,(l-m)!\,(l+m)!\right]^{\frac{1}{2}}}{(l-m'-k)!\,(m'-m+k)!k!\,(l+m-k)!}0^{m'-m+2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varepsilon}.\end{aligned} \tag{5.134}$$

要使上式不等于零, $m'-m+2k=0$, 亦即 $m'-m=-2k$. 另外, $m'-m+k=-k\geqslant 0$(阶乘要求), 且 $k\geqslant 0$, 故 $k=0$ 或 $m'=m$. 又 $\varepsilon\Rightarrow 0$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varepsilon}\simeq 1-\mathrm{i}m\varepsilon$, 因此

$$D^{(l)}_{mm}(R_z)=1-\mathrm{i}m\varepsilon. \tag{5.135}$$

将 (5.133) 与 (5.135) 式代入 (5.111) 式得

$$\hat{L}_zY_{lm}(\theta,\phi)=mY_{lm}(\theta,\phi), \tag{5.136a}$$

或

$$\left[\hat{L}_z,Y_{lm}(\theta,\phi)\right]=mY_{l\,m}(\theta,\phi), \tag{5.136b}$$

是量子力学中熟知的 $\hat{L}_z$ 的本征值方程与对易关系.

5.5 角动量耦合与 CG 系数

角动量耦合是物理学中的一个重要问题, 例如, 量子力学中曾讨论过电子的自旋与轨道角动量的耦合、两电子自旋角动量的耦合及两电子总角动量的耦合等问题. 本节将利用前面得到的旋转群的不可约表示来对该问题作一般性的讨论, 求出角动量耦合的克莱布施–戈登 (Clebsch-Gordan) 系数, 即 CG 系数.

5.5.1 CG 系数的定义

考虑到变量 r, 取函数 $\psi_{jm}(r) = R_j(r) Y_{jm}(\theta, \phi)$ 作为 $SO(3)$ 群不可约表示空间的基矢, 则

$$\hat{P}(R)\psi_{jm}(r) = \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(R)\psi_{jm'}(r), \tag{5.137}$$

其中 $m, m' = j, j-1, \cdots, -j$, 共 $2j+1$ 个取值. 这里, 按习惯角动量量子数用符号 j 表示, $\psi_{jm}(r)$ 是 $\hat{j}^2$ 与 $\hat{j}_z$ 的本征函数. 即

$$\begin{aligned} \hat{j}^2\psi_{jm}(r) &= j(j+1)\psi_{jm}(r), \\ \hat{j}_z\psi_{jm}(r) &= m\psi_{jm}(r). \end{aligned} \tag{5.138}$$

考虑两个粒子系统, 例如核外的两个电子, 每个电子均在各向同性的中心场中运动, 其波函数分别为 $\psi_{j_1m_1}(r_1)$ 与 $\psi_{j_2m_2}(r_2)$, 它们分别是 $SO(3)$ 群不可约表示空间的基矢, 即

$$\hat{P}(R)\psi_{j_1m_1}(r_1) = \psi_{j_1m_1}\left(R^{-1}r_1\right) = \psi_{j_1m_1}(r_1') = \sum_{m_1'=-j_1}^{j_1} D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(R)\psi_{j_1m_1'}(r_1), \tag{5.139}$$

$$\hat{P}(R)\psi_{j_2m_2}(r_2) = \psi_{j_2m_2}\left(R^{-1}r_2\right) = \psi_{j_2m_2}(r_2') = \sum_{m_2'=-j_2}^{j_2} D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(R)\psi_{j_2m_2'}(r_2). \tag{5.140}$$

其中 $m_1, m_1' = j_1, j_1-1, \cdots, -j_1$; $m_2, m_2' = j_2, j_2-1, \cdots, -j_2$. 而

$$\begin{aligned} \hat{j}_1^2\psi_{j_1m_1}(r_1) &= j_1(j_1+1)\psi_{j_1m_1}(r_1), \\ \hat{j}_{1z}\psi_{j_1m_1}(r_1) &= m_1\psi_{j_1m_1}(r_1). \end{aligned} \tag{5.141}$$

$$\begin{aligned} \hat{j}_2^2\psi_{j_2m_2}(r_2) &= j_2(j_2+1)\psi_{j_2m_2}(r_2), \\ \hat{j}_{2z}\psi_{j_2m_2}(r_2) &= m_2\psi_{j_2m_2}(r_2). \end{aligned} \tag{5.142}$$

两电子合成波函数的最简单形式是

$$\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1, r_2) = \psi_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2), \tag{5.143}$$

在 $\hat{P}(R)$ 的作用下, 有

$$
\begin{aligned}
&\hat{P}(R)\,\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)\\
&=\psi_{j_1m_1,j_2m_2}\left(R^{-1}r_1,R^{-1}r_2\right)\\
&=\psi_{j_1m_1}\left(R^{-1}r_1\right)\psi_{j_2m_2}\left(R^{-1}r_2\right)=\psi_{j_1m_1}(r_1')\,\psi_{j_2m_2}(r_2')\\
&=\sum_{m_1'}D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(R)\,\psi_{j_1m_1'}(r_1)\sum_{m_2'}D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(R)\psi_{j_2m_2'}(r_2)\\
&\overset{(2.49)\text{式}}{=\!=\!=}\sum_{m_1'm_2'}\left[D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)\right]_{m_1'm_2',m_1m_2}\psi_{j_1m_1'}(r_1)\,\psi_{j_2m_2'}(r_2)\\
&=\sum_{m_1'm_2'}\left[D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)\right]_{m_1'm_2',m_1m_2}\psi_{j_1m_1',j_2m_2'}(r_1,r_2),
\end{aligned}
\tag{5.144}
$$

表明合成波函数 $\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)$ 是 $SO(3)$ 群表示的直积 $D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)$ 的基矢. 而由 5.3.6 节的讨论知, 直积 $D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)$ 是可约的, 所以 $\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)$ 不是 $SO(3)$ 群不可约表示的基矢, 这样 $\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)$ 也就不是总角动量 $\hat{j}^2$ 与 $\hat{j}_z$ 的本征函数. 那么, 由 $\psi_{j_1m_1}(r_1)$ 与 $\psi_{j_2m_2}(r_2)$ 如何构成总角动量 $\hat{j}^2$ 与 $\hat{j}_z$ 的本征函数呢?

由 (5.92) 式知, $SO(3)$ 群不可约表示的直积可约化成

$$
N(R)=\begin{pmatrix}
D^{(j_1+j_2)}(R) & & & 0_1\\
& D^{(j_1+j_2-1)}(R) & & \\
& & \ddots & \\
0_2 & & & D^{(|j_1-j_2|)}(R)
\end{pmatrix},
\tag{5.145}
$$

其中 0_1 与 0_2 代表零矩阵. 这样

$$
\begin{aligned}
&N_{j'm',jm}(R)=\delta_{j'j}D^{(j)}_{m'm}(R)\,,\\
&j,j'=j_1+j_2,j_1+j_2-1,\cdots,|j_1-j_2|\,.
\end{aligned}
\tag{5.146}
$$

表明存在着幺正矩阵 C, 使得

$$
N(R)=CD^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)\,C^{-1},\quad \text{或}\quad D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)=C^{-1}N(R)\,C,
\tag{5.147}
$$

亦即

$$
\begin{aligned}
&D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(R)\,D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(R)\\
&=\sum_{m'm}\sum_{j'j}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1'm_2',j'm'}N_{j'm',jm}(R)\,C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}
\end{aligned}
$$

$$\xlongequal{(5.146)式}\sum_{m'm}\sum_{j}C^{*(j_1j_2)}_{jm',m'_1m'_2}D^{(j)}_{m'm}(R)\,C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}, \tag{5.148}$$

这里的 $C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}$ 是 jm 行 m_1m_2 列矩阵, 其中

$$\begin{aligned}&j=j_1+j_2,j_1+j_2-1,\cdots,|j_1-j_2|,\\&m_1=j_1,j_1-1,\cdots,-j_1,\\&m_2=j_2,j_2-1,\cdots,-j_2.\end{aligned} \tag{5.149}$$

利用变换矩阵 C, (5.143) 式可改写成

$$\begin{aligned}\psi_{jm}(r_1,r_2)&=\sum_{m_1m_2}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)\\&=\sum_{m_1m_2}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}\psi_{j_1m_1}(r_1)\,\psi_{j_2m_2}(r_2),\end{aligned} \tag{5.150}$$

其逆变换为

$$\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)=\psi_{j_1m_1}(r_1)\,\psi_{j_2m_2}(r_2)=\sum_{jm}C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\psi_{jm}(r_1,r_2)\,. \tag{5.151}$$

由 (5.150) 到 (5.151) 式, 用到了 C 的幺正条件

$$\begin{aligned}&\sum_{jm}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}C^{(j_1j_2)}_{jm,m'_1m'_2}=\delta_{m_1m'_1}\delta_{m_2m'_2},\\\text{或}\quad&\sum_{m_1m_2}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}C^{(j_1j_2)}_{j'm',m_1m_2}=\delta_{jj'}\delta_{mm'}.\end{aligned} \tag{5.152}$$

不难证明, 改写后的波函数 (5.150) 式是 $SO(3)$ 群不可约表示空间的基矢. 因为

$$\begin{aligned}&\hat{P}(R)\,\psi_{jm}(r_1,r_2)\\&=\sum_{m_1m_2}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}\hat{P}(R)\,\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)\\&\xlongequal{(5.144)式}\sum_{m'_1m'_2}\sum_{m_1m_2}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}\left[D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)\right]_{m'_1m'_2,m_1m_2}\psi_{j_1m'_1,j_2m'_2}(r_1,r_2)\\&\xlongequal{(5.151)式}\sum_{j'm'}\sum_{m'_1m'_2}\sum_{m_1m_2}C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}\\&\quad\times\left[D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)\right]_{m'_1m'_2,m_1m_2}C^{(j_1j_2)}_{j'm',m'_1m'_2}\psi_{j'm'}(r_1,r_2)\\&=\sum_{j'm'}\left\{C\left[D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)\right]C^{\dagger}\right\}_{j'm',jm}\psi_{j'm'}(r_1,r_2)\end{aligned}$$

$$\xlongequal{(5.147)\text{式}} \sum_{j'm'} N_{j'm',jm}(R)\psi_{j'm'}(r_1,r_2),$$

再由 (5.146) 式知

$$\hat{P}(R)\,\psi_{jm}(r_1,r_2)=\sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(R)\,\psi_{jm'}(r_1,r_2). \tag{5.153}$$

可见 $\psi_{jm}(r_1,r_2)$ 按不可约表示 $D^{(j)}(R)$ 变换, 所以按 (5.150) 式组合得到的 $\psi_{jm}(r_1,r_2)$ 是总角动量 $\hat{j}^2$ 与 $\hat{j}_z$ 的本征函数.

(5.150) 式中由 $\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)$ 到 $\psi_{jm}(r_1,r_2)$ 的变换系数 $C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}$ 称为克莱布施–戈登系数, 简称为 CG 系数或矢量耦合系数. 通常取该系数为实数, 所以

$$C^{\dagger(j_1j_2)}_{m_1m_2,jm}=C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}=<j_1m_1j_2m_2\,|jm\ >, \tag{5.154}$$

其中最后一形式是狄拉克 (Dirac) 符号, 也常被采用. (5.154) 式中各量子数的取值与关系由 (5.149) 式给出. 这里想做一提的是, CG 系数中的三个角量子数 (j,j_1,j_2) 的关系是对称的, 即任意两个给定的角量子数与第三角量子数间都满足如 (5.149) 式一样的关系. 若 j 与 j_1 已知, 则 j_2 的取值应满足关系

$$j+j_1\geqslant j_2\geqslant|j-j_1|\,. \tag{5.155}$$

或若 j 与 j_2 给定, 则 j_1 应满足关系

$$j+j_2\geqslant j_1\geqslant|j-j_2|. \tag{5.156}$$

由 (5.154) 式, (5.150)~(5.152) 三式变为

$$\begin{aligned}\psi_{jm}(r_1,r_2)&=\sum_{m_1m_2} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)\\&=\sum_{m_1m_2} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\psi_{j_1m_1}(r_1)\,\psi_{j_2m_2}(r_2),\end{aligned} \tag{5.157a}$$

$$\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)=\psi_{j_1m_1}(r_1)\,\psi_{j_2m_2}(r_2)=\sum_{jm} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\psi_{jm}(r_1,r_2), \tag{5.157b}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{jm} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1'm_2'}=\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'},\\ \text{或}&\sum_{m_1m_2} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}C^{(j_1j_2)}_{j'm',m_1m_2}=\delta_{jj'}\delta_{mm'}.\end{aligned} \tag{5.157c}$$

5.5.2 CG 系数的确定

1. 量子数 m 与 m_1、m_2 间的关系

为了确定 (5.157) 式中量子数 m 与 m_1、m_2 的关系, 考虑绕 z 轴转角为 α 的转动, 由 (5.45) 式知

$$D_{m'm}^{(l)}(R_z) = \delta_{m'm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}. \tag{5.158}$$

用 $\hat{P}(R_z)$ 作用于 (5.157a) 式两边得

$$\hat{P}(R_z)\psi_{jm}(r_1, r_2) = \sum_{m_1 m_2} C_{jm,m_1 m_2}^{(j_1 j_2)} \hat{P}(R_z)\psi_{j_1 m_1, j_2 m_2}(r_1, r_2), \tag{5.159}$$

其中等式左边

$$\begin{aligned}\hat{P}(R_z)\psi_{jm}(r_1, r_2) &= \sum_{m'} D_{m'm}^{(j)}(R_z)\psi_{jm'}(r_1, r_2) \\ &\xlongequal{(5.158)式} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}\psi_{jm}(r_1, r_2).\end{aligned}$$

再由 (5.144) 式知, (5.159) 式右边中的

$$\begin{aligned}&\hat{P}(R_z)\psi_{j_1 m_1, j_2 m_2}(r_1, r_2) \\ &= \sum_{m_1' m_2'} \left[D^{(j_1)}(R_z) \otimes D^{(j_2)}(R_z)\right]_{m_1' m_2', m_1 m_2} \psi_{j_1 m_1'}(r_1)\psi_{j_2 m_2'}(r_2),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left[D^{(j_1)}(R_z) \otimes D^{(j_2)}(R_z)\right]_{m_1' m_2', m_1 m_2} &\xlongequal{(2.49)式} D_{m_1' m_1}^{(j_1)}(R_z) D_{m_2' m_2}^{(j_2)}(R_z) \\ &\xlongequal{(5.158)式} \delta_{m_1' m_1}\delta_{m_2' m_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1+m_2)\alpha}.\end{aligned}$$

这样

$$\hat{P}(R_z)\psi_{j_1 m_1, j_2 m_2}(r_1, r_2) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1+m_2)\alpha}\psi_{j_1 m_1, j_2 m_2}(r_1, r_2).$$

(5.159) 式变为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}\psi_{jm}(r_1, r_2) = \sum_{m_1 m_2} C_{jm,m_1 m_2}^{(j_1 j_2)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m_1+m_2)\alpha}\psi_{j_1 m_1, j_2 m_2}(r_1, r_2). \tag{5.160a}$$

再由 (5.157a) 式, 上式左边

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}\psi_{jm}(r_1, r_2) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha} \sum_{m_1 m_2} C_{jm,m_1 m_2}^{(j_1 j_2)} \psi_{j_1 m_1, j_2 m_2}(r_1, r_2). \tag{5.160b}$$

由于 $\psi_{j_1m_1,j_2m_2}(r_1,r_2)$ 线性无关, (5.160a) 与 (5.160b) 两式表明

$$m = m_1 + m_2. \tag{5.161}$$

这样

$$C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2} = C^{(j_1j_2)}_{j,m_1m_2}\delta_{m,m_1+m_2}, \tag{5.162}$$

(5.148) 式变为

$$D^{(j_1)}_{m'_1m_1}(R)\,D^{(j_2)}_{m'_2m_2}(R) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{(j_1j_2)}_{j,m'_1m'_2}D^{(j)}_{m'_1+m'_2,m_1+m_2}(R)\,C^{(j_1j_2)}_{j,m_1m_2}. \tag{5.163}$$

2. CG 系数的确定

由 (4.160) 式知, 两不可约表示的矩阵元满足正交关系:

$$\begin{aligned}&\int\limits_G D^{*(j_1)}_{m'_1m_1}(\alpha,\beta,\gamma)\,D^{(j_2)}_{m'_2m_2}(\alpha,\beta,\gamma)\,w(\alpha,\beta,\gamma)\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\\&=\frac{\int w(\alpha,\beta,\gamma)\mathrm{d}\alpha d\beta d\gamma}{l_{j_1}}\delta_{j_1j_2}\delta_{m'_1m'_2}\delta_{m_1m_2}.\end{aligned} \tag{5.164}$$

三个欧拉角的变化范围分别为

$$0\leqslant\alpha,\quad\gamma\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi.$$

权重因子 $w(\alpha,\beta,\gamma)=\sin\beta$, 所以

$$\int w(\alpha,\beta,\gamma)\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma = 8\pi^2. \tag{5.165}$$

l_{j_1} 为表示的维数, 对于表示 $D^{(j_1)}(R), l_{j_1}=2j_1+1$.

用 $D^{(j)*}_{m'_1+m'_2,m_1+m_2}(R)$ 乘 (5.163) 式两边并对欧拉角加权积分, 利用正交关系 (5.164) 式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8\pi^2}\int D^{(j_1)}_{m'_1m_1}(\alpha,\beta,\gamma)\,D^{(j_2)}_{m'_2m_2}(\alpha,\beta,\gamma)\,D^{*(j)}_{m'_1+m'_2,m_1+m_2}(\alpha,\beta,\gamma)\ \sin\beta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma\\&=\frac{1}{2j+1}\boldsymbol{C}^{(j_1j_2)}_{j,m'_1m'_2}\boldsymbol{C}^{(j_1j_2)}_{j,m_1m_2}.\end{aligned} \tag{5.166}$$

为了确定 $\boldsymbol{C}^{(j_1j_2)}_{j,m_1m_2}$, 在上式中令 $m'_1=j_1$, $m'_2=-j_2$, 并由 (5.54a)、(5.55) 与 (5.56) 三式知

$$D^{*(j)}_{j_1-j_2,m_1+m_2}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$
= \sum_{k=0}^{j+m_1+m_2} (-1)^k \frac{[(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j-m_1-m_2)!\,(j+m_1+m_2)!]^{\frac{1}{2}}}{(j-j_1+j_2-k)!\,(j_1-j_2-m_1-m_2+k)!k!\,(j+m_1+m_2-k)!}
$$
$$
\times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2j+m_1+m_2-j_1+j_2-2k} \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{j_1-j_2-m_1-m_2+2k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(j_1-j_2)\alpha+(m_1+m_2)\gamma]}, \tag{5.167}
$$

$$
D^{(j_1)}_{j_1 m_1}(\alpha,\beta,\gamma) = \left[\frac{(2j_1)!}{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!}\right]^{\frac{1}{2}} \times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{j_1+m_1} \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{j_1-m_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j_1\alpha+m_1\gamma)}, \tag{5.168}
$$

$$
D^{(j_2)}_{-j_2 m_2}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{j_2+m_2} \left[\frac{(2j_2)!}{(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!}\right]^{\frac{1}{2}} \times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{j_2-m_2} \left(-\sin\frac{\beta}{2}\right)^{j_2+m_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j_2\alpha-m_2\gamma)}. \tag{5.169}
$$

将 (5.167)~(5.169) 三式代入 (5.166) 式, 并注意到 $(-1)^{2(j_1-m_1)} = (-1)^{2k} = 1$, 得

$$
\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{(2j_1)!\,(2j_2)!\,(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j-m_1-m_2)!\,(j+m_1+m_2)!}{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!}\right]^{\frac{1}{2}}
$$
$$
\times \sum_k (-1)^{k+j_2+m_2} \frac{1}{(j-j_1+j_2-k)!\,(j_1-j_2-m_1-m_2+k)!k!\,(j+m_1+m_2-k)!}
$$
$$
\times \int \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2(j+j_2+m_1-k)} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2(j_1-m_1+k)} \sin\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma
$$
$$
= \frac{1}{2j+1} C^{(j_1 j_2)}_{j,j_1-j_2} C^{(j_1\, j_2)}_{j,m_1 m_2}. \tag{5.170}
$$

利用积分

$$
\frac{1}{8\pi^2}\int \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2a} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2b} \sin\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}, \tag{5.171}
$$

则

$$
\frac{1}{8\pi^2}\int \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2(j+j_2+m_1-k)} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2(j_1-m_1+k)} \sin\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma
$$
$$
= \frac{(j+j_2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j+j_1+j_2+1)!}.
$$

代入 (5.170) 式得

$$
\frac{2j+1}{(j+j_1+j_2+1)!}
$$

$$\times\left[\frac{(2j_1)!\,(2j_2)!\,(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j-m_1-m_2)!\,(j+m_1+m_2)!}{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\sum_k(-1)^{k+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j-j_1+j_2-k)!\,(j_1-j_2-m_1-m_2+k)!k!\,(j+m_1+m_2-k)!}$$

$$=C^{(j_1j_2)}_{j,j_1-j_2}C^{(j_1j_2)}_{j,m_1m_2}. \tag{5.172}$$

上式中令 $m_1=j_1$, $m_2=-j_2$, 得

$$\left(c^{(j_1j_2)}_{j,j_1-j_2}\right)^2=\frac{(2j+1)\,(j+j_1-j_2)!}{(j+j_1+j_2+1)!}\times\sum_k(-1)^k\frac{(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1+j_2-k)!}{(j-j_1+j_2-k)!k!\,(j+j_1-j_2-k)!}.$$

再利用恒等式

$$\sum_k(-1)^k\frac{(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1+j_2-k)!}{(j-j_1+j_2-k)!k!\,(j+j_1-j_2-k)!}=\frac{(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j+j_1-j_2)!\,(j_1+j_2-j)!},$$

则

$$C^{(j_1j_2)}_{j,j_1-j_2}=\left[\frac{(2j+1)\,(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j+j_1+j_2+1)!\,(j_1+j_2-j)!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.173}$$

代入 (5.172) 式得

$$C^{(j_1j_2)}_{j,m_1m_2}=\left[\frac{(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j-m_1-m_2)!\,(j+m_1+m_2)!\,(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)}{(j+j_1+j_2+1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!}\right]^{\frac{1}{2}}\times\sum_k(-1)^{k+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j-j_1+j_2-k)!\,(j_1-j_2-m_1-m_2+k)!k!\,(j+m_1+m_2-k)!}.$$

将其代入 (5.162) 式, 最后得 CG 系数

$$C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}=\delta_{m,m_1+m_2}\left[\frac{(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j-m)!\,(j+m)!\,(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)}{(j+j_1+j_2+1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!}\right]^{\frac{1}{2}}\times\sum_k(-1)^{k+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j-j_1+j_2-k)!\,(j_1-j_2-m+k)!k!\,(j+m-k)!}, \tag{5.174}$$

其中各量子数的取值与关系由 (5.149)、(5.155)、(5.156) 及 (5.161) 四式给出. 这里想说明一点的是, CG 系数的 (5.174) 式在形式上不是唯一的, 通过求和指标的适当代换, 该式可变换成多种其他等价的形式. 常用的形式有三种: 拉卡 (Racah) 形式、范德瓦尔登 (Van der Waerden) 形式与维格纳 (Wigner) 形式. 这里和以后将采用 (5.174) 式的形式.

5.5.3　CG 系数举例

1. 一角动量为 1/2 的 CG 系数

例如, 若取 $j_2=1/2$, 由 (5.149) 式知, $m_2=\pm 1/2$, 则总角动量 $j=j_1\pm 1/2$. 由 (5.174) 式可求得该情况下的 CG 系数, 如表 5.1 所示.

表 5.1　CG 系数 $C^{(j_1 1/2)}_{jm,m_1m_2}$

$j \backslash m_2$	$m_2=\frac{1}{2}$	$m_2=-\frac{1}{2}$
$j_1+\frac{1}{2}$	$\left(\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{j+m_1+1/2}{2j}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{j-m_1+1/2}{2j}\right)^{\frac{1}{2}}$
$j_1-\frac{1}{2}$	$-\left(\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}=-\left(\frac{j-m_1+1/2}{2j+2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{j+m_1+1/2}{2j+2}\right)^{\frac{1}{2}}$

如 $j=j_1+1/2$、$m_2=1/2$ 时, $m=m_1+1/2$, 按 (5.174) 式

$$
\begin{aligned}
&C^{(j_1 1/2)}_{j_1+1/2\ m_1+1/2,m_1\ 1/2}\\
=&\left[\frac{(j_1+1/2-j_1+1/2)!\,(j_1+1/2+j_1-1/2)!\,(j_1+1/2-m_1-1/2)!}{(j_1+1/2+j_1+1/2+1)!\,(j_1+m_1)!}\right.\\
&\left.\times\ \frac{(j_1+1/2+m_1+1/2)!\,(j_1+1/2-j_1-1/2)!\,(2j_1+2)}{(j_1-m_1)!\,(1/2+1/2)!\,(1/2-1/2)!}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\times\sum_k(-1)^{k+1}(j_1+1/2+1/2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!\Big/\\
&[(j_1+1/2-j_1+1/2-k)!\,(j_1-1/2-m_1-1/2+k)!k!\,(j_1+1/2+m_1+1/2-k)!]\\
=&\left[\frac{1!\,(2j_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_1+m_1+1)!0!\,(2j_1+2)}{(2j_1+2)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!1!0!}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left[-\frac{(j_1+m_1+1)!\,(j_1-m_1)!}{1!\,(j_1-m_1-1)!\,0!\ (j_1+m_1+1)!}+\frac{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1+1)!}{0!\,(j_1-m_1)!\ 1!\ (j_1+m_1)!}\right]\\
=&\left(\frac{j_1+m_1+1}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}[-(j_1-m_1)+(j_1-m_1+1)]\\
=&\left(\frac{j_1+m_1+1}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{cases}\xlongequal{m_1=m-1/2}\left(\dfrac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}},\\[2ex] \xlongequal{j_1=j-1/2}\left(\dfrac{j+m_1+1/2}{2j}\right)^{\frac{1}{2}},\end{cases}\quad\Rightarrow\text{表 5.1 中第1行第1列项得证.}
\end{aligned}
$$

再如 $j=j_1-1/2$、$m_2=1/2$ 时, $m=m_1+1/2$, 按 (5.174) 式

$$C^{(j_1 1/2)}_{j_1-1/2\ m_1+1/2,m_1\ 1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[\frac{(j_1-1/2-j_1+1/2)!\,(j_1-1/2+j_1-1/2)!\,(j_1-1/2-m_1-1/2)!}{(j_1-1/2+j_1+1/2+1)!\,(j_1+m_1)!}\right.\\
&\quad\left.\times\ \frac{(j_1-1/2+m_1+1/2)!\,(j_1+1/2-j_1+1/2)!\,(2j_1)}{(j_1-m_1)!\,(1/2+1/2)!\,(1/2-1/2)!}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\sum_k(-1)^{k+1}\,(j_1-1/2+1/2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!\Big/\\
&\quad[(j_1-1/2-j_1+1/2-k)!\,(j_1-1/2-m_1-1/2+k)!k!\,(j_1-1/2+m_1+1/2-k)!]\\
&=\left[\frac{0!\,(2j_1-1)!\,(j_1-m_1-1)!\,(j_1+m_1)!1!\,(2j_1)}{(2j_1+1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!1!0!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!}{0!\,(j_1-m_1-1)!\,0!\ \,(j_1+m_1)!}\right]\\
&=-\left[\frac{1}{(2j_1+1)\,(j_1-m_1)}\right]^{\frac{1}{2}}(j_1-m_1)\\
&=-\left(\frac{j_1-m_1}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{l}\overset{m_1=m-1/2}{=\!=\!=\!=\!=}-\left(\dfrac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}\right)^{\frac{1}{2}},\\ \overset{j_1=j+1/2}{=\!=\!=\!=}-\left(\dfrac{j-m_1+1/2}{2j+2}\right)^{\frac{1}{2}},\end{array}\right.\quad\Rightarrow\text{表 5.1 中第2行第1列项得证.}
\end{aligned}
$$

同法可求得表 5.1 中其他两项, 有兴趣的读者可自求之.

例 5.4 由表 5.1 的 CG 系数, 可求得两电子的合成自旋波函数. 为此采用惯用符号

$$
\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\tag{5.175}
$$

分别代表自旋向上 $(s_z=1/2)$ 与向下 $(s_z=-1/2)$ 的自旋波函数, 用 $|j,m>$ 代表合成的自旋波函数.

由于电子的自旋 $j_1=j_2=1/2$, 则合成的总自旋 $j=1,0$. 当 $j=1$ 时, $m=1,0,-1$; 当 $j=0$ 时, $m=0$. 考虑到 $m=m_1+m_2$, 则由表 5.1 可得 $C^{(1/2\ 1/2)}_{j\,m,m_1m_2}$ 系数, 如表 5.2 所示.

表 5.2 CG 系数 $C^{(1/2\ 1/2)}_{jm,m_1m_2}$

j \ m_2	$m_2=\frac{1}{2}$	$m_2=-\frac{1}{2}$
1	$\left(\frac{3/2+m_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{3/2-m_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
0	$-\left(\frac{1/2-m_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{1/2+m_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

这样, 由表 5.2 与 (5.157a) 式得

$$\begin{cases} |1,1> = \alpha(1)\alpha(2), \\ |1,0> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)+\beta(1)\alpha(2)], \\ |1,-1> = \beta(1)\beta(2); \end{cases} \tag{5.176a}$$

$$|0,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)-\beta(1)\alpha(2)]. \tag{5.176b}$$

例如

$$|1,1> = C^{(1/2\ 1/2)}_{11,1/2\ 1/2}\alpha(1)\alpha(2) = \alpha(1)\alpha(2).$$

再如

$$\begin{aligned} |1,0> &= C^{(1/2\ 1/2)}_{10,1/2\ -1/2}\alpha(1)\beta(2) + C^{(1/2\ 1/2)}_{10,-1/2\ 1/2}\beta(1)\alpha(2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)+\beta(1)\alpha(2)]. \end{aligned}$$

同法可求得其他各态的波函数, (5.176) 式的合成波函数在量子力学中早已熟知.

2. 一角动量为 1 的 CG 系数

取 $j_2 = 1$, 由 (5.149) 式知, $m_2 = 1, 0, -1$, 则总角动量 $j = j_1+1, j_1, j_1-1$. 由 (5.174) 式可求得该情况下的 CG 系数, 如表 5.3 所示.

表 5.3　CG 系数 $C^{(j_1 1)}_{jm,m_1m_2}$

j \ m_2	$m_2=1$	$m_2=0$	$m_2=-1$
j_1+1	$\left[\dfrac{(j_1+m)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\dfrac{(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\dfrac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$
j_1	$-\left[\dfrac{(j_1+m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{m}{[j_1(j_1+1)]^{\frac{1}{2}}}$	$\left[\dfrac{(j_1-m)(j_1+m+1)}{2j_1(j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
j_1-1	$\left[\dfrac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{2j_1(2j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$-\left[\dfrac{(j_1-m)(j_1+m)}{j_1(2j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\dfrac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(2j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$

例如, $j=j_1+1$, $m_2=1$ 时, $m=m_1+1$, 由 (5.174) 式得

$$C^{(j_1 1)}_{j_1+1\ m_1+1,m_1 1} = \left[\frac{\begin{array}{l}(j_1+1-j_1+1)!(j_1+1+j_1-1)!(j_1+1-m_1-1)!(j_1+1+m_1+1)! \\ \times(j_1+1-j_1-1)!(2j_1+3)\end{array}}{(j_1+1+j_1+1+1)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!2!0!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\sum_k(-1)^k\frac{(j_1+1+1+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j_1+1-j_1+1-k)!\,(j_1-1-m_1-1+k)!k!\,(j_1+1+m_1+1-k)!}$$

$$=\left[\frac{2!\,(2j_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_1+m_1+2)!0!\,(2j_1+3)}{(2j_1+3)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!2!\,0!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\frac{(j_1+m_1+2)!\,(j_1-m_1)!}{2!\,(j_1-m_1-2)!0!\,(j_1+m_1+2)!}\right.$$

$$\left.-\frac{(j_1+m_1+1)!\,(j_1-m_1+1)!}{1!\,(j_1-m_1-1)!1!\,(j_1+m_1+1)!}+\frac{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1+2)!}{0!\,(j_1-m_1)!2!\,(j_1+m_1)!}\right]$$

$$=\left[\frac{(j_1+m_1+1)\,(j_1+m_1+2)}{(2j_1+1)\,(2j_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\frac{1}{2}(j_1-m_1)\,(j_1-m_1-1)-(j_1-m_1+1)\,(j_1-m_1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(j_1-m_1+2)\,(j_1-m_1+1)\right]$$

$$=\left[\frac{(j_1+m_1+1)\,(j_1+m_1+2)}{(2j_1+1)\,(2j_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{m=m_1+1}{=\!=\!=}\left[\frac{(j_1+m)\,(j_1+m+1)}{(2j_1+1)\,(2j_1+2)}\right]^{\frac{1}{2}},\quad\Rightarrow \text{表 5.3 中第 1 行第 1 列项得证.}$$

再如 $j=j_1$, $m_2=1$ 时, $m=m_1+1$, 由 (5.174) 式得

$$C^{(j_11)}_{j_1m_1+1,m_11}$$

$$=\left[\frac{(j_1-j_1+1)!\,(j_1+j_1-1)!\,(j_1-m_1-1)!\,(j_1+m_1+1)!\,(j_1+1-j_1)!\,(2j_1+1)}{(j_1+j_1+1+1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!2!\,0!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\sum_k(-1)^k\frac{(j_1+1+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j_1-j_1+1-k)!\,(j_1-1-m_1-1+k)!k!\,(j_1+m_1+1-k)!}$$

$$=\left[\frac{1!\,(2j_1-1)!\,(j_1-m_1-1)!\,(j_1+m_1+1)!1!\,(2j_1+1)}{(2j_1+2)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!2!\,0!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\frac{(j_1+m_1+1)!\,(j_1-m_1)!}{1!\,(j_1-m_1-2)!0!\,(j_1+m_1+1)!}-\frac{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1+1)!}{0!\,(j_1-m_1-1)!1!\,(j_1+m_1)!}\right]$$

$$=\left[\frac{j_1+m_1+1}{(2j_1+2)\,(2j_1)\,(j_1-m_1)\,2}\right]^{\frac{1}{2}}[(j_1-m_1)\,(j_1-m_1-1)-(j_1-m_1+1)\,(j_1-m_1)]$$

$$=-\left[\frac{(j_1+m_1+1)\,(j_1-m_1)}{2j_1\,(j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{m=m_1+1}{=\!=\!=}-\left[\frac{(j_1+m)\,(j_1-m+1)}{2j_1\,(j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}},\quad\Rightarrow \text{表 5.3 中第 2 行第 1 列项得证.}$$

又如 $j=j_1-1$, $m_2=1$ 时, $m=m_1+1$, 由 (5.174) 式得

$$
\begin{aligned}
&C^{(j_1 1)}_{j_1-1\ m_1+1, m_1 1}\\
&=\left[\frac{\begin{array}{l}(j_1-1-j_1+1)!(j_1-1+j_1-1)!(j_1-1-m_1-1)!(j_1-1+m_1+1)!\\ \times(j_1+1-j_1+1)!(2j_1-1)\end{array}}{(j_1-1+j_1+1+1)!(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!2!0!}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\sum_k(-1)^k\frac{(j_1-1+1+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j_1-1-j_1+1-k)!\,(j_1-1-m_1-1+k)!k!\,(j_1-1+m_1+1-k)!}\\
&=\left[\frac{0!\,(2j_1-2)!\,(j_1-m_1-2)!\,(j_1+m_1)!2!\,(2j_1-1)}{(2j_1+1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!2!\,0!}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!}{0!\,(j_1-m_1-2)!0!\,(j_1+m_1)!}\\
&=\left[\frac{1}{(2j_1+1)\,(2j_1)\,(j_1-m_1)\,(j_1-m_1-1)}\right]^{\frac{1}{2}}(j_1-m_1)\,(j_1-m_1-1)\\
&=\left[\frac{(j_1-m_1)\,(j_1-m_1-1)}{2j_1\,(2j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{m=m_1+1}{=\!=\!=}\left[\frac{(j_1-m)\,(j_1-m+1)}{2j_1\,(2j_1+1)}\right]^{\frac{1}{2}},\quad \Rightarrow \text{表 5.3 中第 3 行第 1 列项得证.}
\end{aligned}
$$

同法可求得表 5.3 中的其他各项, 有兴趣的读者可自求之.

5.5.4 CG 系数的对称性

CG 系数具有多种对称性, 如

$$
C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}=C^{(j_2j_1)}_{j-m,-m_2-m_1}=(-1)^{j_1+j_2-j}\,C^{(j_1j_2)}_{j-m,-m_1-m_2}=(-1)^{j_1+j_2-j}\,C^{(j_2j_1)}_{jm,m_2m_1}. \tag{5.177}
$$

采用 (5.174) 式可直接证得这些对称性.

例 5.5 证明 (5.177) 各等式.

证明 记

$$
C_0=\delta_{m,m_1+m_2}\left[\frac{(j-j_1+j_2)!\,(j+j_1-j_2)!\,(j-m)!\,(j+m)!\,(j_1+j_2-j)!\,(2j+1)}{(j+j_1+j_2+1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!}\right]^{\frac{1}{2}},
$$

则 (5.174) 式的 CG 系数为

$$
C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}=C_0\sum_k(-1)^{k+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-k)!\,(j_1-m_1+k)!}{(j-j_1+j_2-k)!\,(j_1-j_2-m+k)!k!\,(j+m-k)!}.
$$

这样

$$
\begin{aligned}
&C^{(j_2j_1)}_{j-m,-m_2-m_1}\\
=&C_0\sum_k(-1)^{k+j_1-m_1}\frac{(j+j_1-m_2-k)!\,(j_2+m_2+k)!}{(j-j_2+j_1-k)!\,(j_2-j_1+m+k)!k!\,(j-m-k)!}.
\end{aligned}
$$

令

$$
j_2-j_1+m+k=k',\quad\Rightarrow k=j_1-j_2-m+k',
$$

则

$$
\begin{aligned}
&C^{(j_2j_1)}_{j-m,-m_2-m_1}\\
&=C_0\sum_{k'}(-1)^{k'-j_2-m_2+2(j_1-m_1)}\frac{(j+j_2+m_1-k')!\,(j_1-m_1+k')!}{(j+m-k')!k'!\,(j_1-j_2-m+k')!\,(j-j_1+j_2-k')!}\\
&=C_0\sum_{k'}(-1)^{k'+j_2+m_2}\frac{(j+j_2+m_1-k')!\,(j_1-m_1+k')!}{(j+m-k')!k'!\,(j_1-j_2-m+k')!\,(j-j_1+j_2-k')!}\\
&=C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2},\quad\Rightarrow \text{(5.177)第 1 等式得证.}
\end{aligned}
$$

上式中由第 1 到第 2 等号, 用到了关系 $(-1)^{-j_2-m_2}=(-1)^{j_2+m_2}$, $(-1)^{2(j_1-m_1)}=1$.

再

$$
\begin{aligned}
&C^{(j_1j_2)}_{j-m,-m_1-m_2}\\
=&C_0\sum_k(-1)^{k+j_2-m_2}\frac{(j+j_2-m_1-k)!\,(j_1+m_1+k)!}{(j-j_1+j_2-k)!\,(j_1-j_2+m+k)!k!\,(j-m-k)!}.
\end{aligned}
$$

令

$$
j-j_1+j_2-k=k',\quad\Rightarrow k=j-j_1+j_2-k',
$$

$$
\begin{aligned}
&C^{(j_1j_2)}_{j-m,-m_1-m_2}\\
&=C_0\sum_{k'}(-1)^{j-j_1+2j_2-m_2-k'}\frac{(j_1-m_1+k')!\,(j+j_2+m_1-k')!}{k'!\,(j+m-k')!\,(j-j_1+j_2-k')!\,(j_1-j_2-m+k')!},
\end{aligned}
$$

其中

$$
(-1)^{j-j_1+2j_2-m_2-k'}=(-1)^{j-j_1-j_2+4j_2-j_2-m_2-k'}=(-1)^{j_1+j_2-j}\,(-1)^{k'+j_2+m_2}.
$$

这样

$$
C^{(j_1j_2)}_{j-m,-m_1-m_2}=(-1)^{j_1+j_2-j}\,C_0
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{k'} (-1)^{k'+j_2+m_2} \frac{(j_1-m_1+k')!\,(j+j_2+m_1-k')!}{k'!\,(j+m-k')!\,(j-j_1+j_2-k')!\,(j_1-j_2-m+k')!} \\
&= (-1)^{j_1+j_2-j}\, C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}, \quad \Rightarrow (5.177)\text{第 2 等式得证.}
\end{aligned}
$$

另

$$
C^{(j_2j_1)}_{jm,m_2m_1} = C_0 \sum_k (-1)^{k+j_1+m_1} \frac{(j+j_1+m_2-k)!\,(j_2-m_2+k)!}{(j-j_2+j_1-k)!\,(j_2-j_1-m+k)!k!\,(j+m-k)!}.
$$

作变换

$$
j+j_1+m_2-k = j_1-m_1+k', \quad \Rightarrow k = j+m_2+m_1-k' = j+m-k',
$$

$$
\begin{aligned}
&C^{(j_2j_1)}_{jm,m_2m_1} \\
&= C_0 \sum_{k'} (-1)^{j+m-k'+j_1+m_1} \frac{(j_1-m_1+k')!\,(j+j_2+m_1-k')!}{(j_1-j_2-m+k')!\,(j-j_1+j_2-k')!\,(j+m-k')!k'!},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{j+m-k'+j_1+m_1} \\
&= (-1)^{j+2m_1+j_1-k'+m_2} = (-1)^{j-j_1-j_2+2(m_1+j_1+m_2+j_2)-k'-j_2-m_2} \\
&= (-1)^{j_1+j_2-j}\,(-1)^{k'+j_2+m_2},
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
C^{(j_2j_1)}_{jm,m_2m_1} &= (-1)^{j_1+j_2-j}\, C_0 \sum_{k'} (-1)^{k'+j_2+m_2} \\
&\quad \frac{(j_1-m_1+k')!\,(j+j_2+m_1-k')!}{(j_1-j_2-m+k')!\,(j-j_1+j_2-k')!\,(j+m-k')!k'!} \\
&= (-1)^{j_1+j_2-j}\, C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}, \quad \Rightarrow (5.177)\text{第 3 等式得证.}
\end{aligned}
$$

5.6　坐标转动变换下算符的变换与维格纳–埃卡特定理

物理学中的算符有标量算符、矢量算符、张量算符与不可约张量算符之分. 例如, 拉普拉斯算符 $\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ 是标量算符; $\boldsymbol{\nabla}$ 是矢量算符; 并矢 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}$ 是二阶张量算符; 球谐函数 Y_{lm} 是 l 阶不可约张量算符. 本节将给出不同算符的定义及其在坐标转动变换下的变换形式; 介绍量子跃迁中的维格纳–埃卡特定理.

5.6.1 算符的分类及其在坐标转动变换下的变换形式

设有算符 $\hat{F}(r)$, 作用在波函数 $\psi(r)$ 后得另一波函数 $\phi(r)$, 即

$$\hat{F}(r)\psi(r)=\phi(r). \tag{5.178}$$

另设 $\hat{P}(R)$ 为与转动 R 对应的函数变换算符, 用其作用在 (5.178) 式两边得

$$\hat{P}(R)\hat{F}(r)\psi(r)=\hat{P}(R)\phi(r),$$

或

$$\hat{P}(R)\hat{F}(r)\hat{P}^{-1}(R)\hat{P}(R)\psi(r)=\hat{P}(R)\phi(r). \tag{5.179}$$

记

$$\hat{F}'(r)=\hat{P}(R)\hat{F}(r)\hat{P}^{-1}(R), \tag{5.180}$$

并注意到 (4.138) 式

$$\hat{P}(R)\psi(r)=\psi\left(R^{-1}r\right),\quad \hat{P}(R)\phi(r)=\phi\left(R^{-1}r\right),$$

(5.179) 式变为

$$\hat{F}'(r)\psi\left(R^{-1}r\right)=\phi\left(R^{-1}r\right). \tag{5.181}$$

再由 (5.178) 式知

$$\hat{F}\left(R^{-1}r\right)\psi\left(R^{-1}r\right)=\phi\left(R^{-1}r\right), \tag{5.182}$$

比较 (5.181) 与 (5.182) 两式知

$$\hat{F}'(r)=\hat{P}(R)\hat{F}(r)\hat{P}^{-1}(R)=\hat{F}\left(R^{-1}r\right), \tag{5.183}$$

表明, 当坐标作转动变换 R 时, 算符要经受一个相似变换. 不同的算符, 变换后的具体形式不同, 据此可对它们进行分类.

1. 标量算符

若算符 $\hat{\phi}(r)$ 只有一个分量, 且在转动变换 R 下按 $SO(3)$ 群的不可约表示 $D^{(0)}(R)=1$ 变换, 即

$$\hat{\phi}'(r)=\hat{P}(R)\hat{\phi}(r)\hat{P}^{-1}(R)=D^{(0)}(R)\hat{\phi}(r)=\hat{\phi}(r), \tag{5.184}$$

即 $\hat{\phi}(r)$ 在空间坐标转动变换下不变, 则称 $\hat{\phi}(r)$ 为标量算符 (scalar operator).

2. 矢量算符

若算符 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ 的分量由一个指标描述, 共三个分量 $\hat{A}_i(r)\,(i=1,2,3)$, 在转动 R 的变换下按如下形式变换:

$$\hat{\boldsymbol{A}}'(\boldsymbol{r})=\hat{P}(R)\,\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})\,\hat{P}^{-1}(R)=R^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}), \tag{5.185}$$

或

$$\hat{A}_i'(r)=\hat{P}(R)\,\hat{A}_i(r)\,\hat{P}^{-1}(R)=\sum_j R_{ij}^{-1}\hat{A}_j(r)\xlongequal{R^{-1}=\tilde{R}}\sum_j R_{ji}\hat{A}_j(r), \tag{5.186}$$

则称 $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ 为矢量算符 (vector operator). (5.186) 式表明, 与矢量场变换的 (5.94) 式不同, 在那里, 矢量场的行指标是与变换矩阵的列指标相收缩的, 且等号两边的自变量差了一个逆变换 R^{-1}. (5.186) 式与基矢的变换、如 (5.39) 式形式相同, 矢量算符的列指标与 R 的行指标相收缩, 等号两边的自变量相同, 都是 r.

3. l 阶张量算符

若算符 $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{r})$, 其分量指标有 l 个, 共 3^l 个分量, 即

$$\hat{T}_{\underbrace{ijk\cdots}_{l\text{ 个指标}}}(r)\quad(i、j、k、\cdots=1,2,3), \tag{5.187}$$

在空间坐标作转动变换 R 时, 作变换

$$\begin{aligned}\hat{P}(R)\,\hat{T}_{ijk\cdots}(r)\,\hat{P}^{-1}(R)&=\sum_{i'j'k'\cdots}R_{i'i}R_{j'j}R_{k'k}\cdots\hat{T}_{i'j'k'\cdots}(r)\\&\xlongequal{(2.49)\text{式}}\sum_{i'j'k'\cdots}(R\otimes R\otimes\cdots\otimes R)_{i'j'k'\cdots,ijk\cdots}\hat{T}_{i'j'k'\cdots}(r),\end{aligned} \tag{5.188}$$

则称 $\hat{T}_{ijk\cdots}(r)$ 为 l 阶张量算符 (lth order tensor operator), 或 l 阶三维张量算符. 显然, 标量算符是零阶张量算符, 矢量算符为一阶张量算符.

例 5.6　证明算符

$$\boldsymbol{\nabla}=\sum_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,(i=1,2,3),\ \boldsymbol{\nabla}^2=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla},\ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}, \tag{5.189}$$

分别是矢量算符、标量算符与二阶张量算符.

证明　此时的 $\hat{A}_i=\nabla_i=\partial/\partial x_i$, 在坐标作 R 转动后

$$r'=Rr,\quad\text{或}\quad x_i'=\sum_j R_{ij}x_j, \tag{5.190}$$

则

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_j \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x'_j} \xlongequal{(5.190)\text{式}} \sum_j R_{ji}\frac{\partial}{\partial x'_j},\\
&\Rightarrow \nabla_i(r) = \sum_j R_{ji}\nabla_j(r') = \sum_j R_{ji}\nabla_j(Rr), \qquad (5.191)\\
&\xrightarrow{(5.183)\text{式}} \nabla'_i(r) = \nabla_i\left(R^{-1}r\right) \xlongequal{(5.191)\text{式}} \sum_j R_{ji}\nabla_j(r), \qquad (5.192)
\end{aligned}
$$

满足矢量算符定义的 (5.186) 式, $\boldsymbol{\nabla}$ 是矢量算符.

再

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}'^2 &= \sum_{i=1}^{3}\nabla_i'^2 \xlongequal{(5.192)\text{式}} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} R_{ji}R_{ki}\nabla_j\nabla_k\\
&\xlongequal{R^{-1}=\tilde{R}} \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\delta_{jk}\nabla_j\nabla_k = \sum_{j=1}^{3}\nabla_j^2 = \boldsymbol{\nabla}^2, \qquad (5.193)
\end{aligned}
$$

表明 $\boldsymbol{\nabla}^2$ 是标量算符.

又

$$
\nabla'_i\nabla'_j \xlongequal{(5.192)\text{式}} \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} R_{ki}R_{lj}\nabla_k\nabla_l = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(R\otimes R)_{kl,ij}\nabla_k\nabla_l, \qquad (5.194)
$$

表明 $\boldsymbol{\nabla\nabla}$ 是二阶张量算符.

4. l 阶不可约张量算符

(1) l 阶不可约张量算符的定义

设有算符 $\hat{S}_{lm}(r)\,(m=l,l-1,\cdots,-l)$, 共有 $2l+1$ 个分量, 在 R 转动下有变换

$$
\hat{S}'_{lm}(r) = \hat{P}(R)\hat{S}_{lm}(r)\hat{P}^{-1}(R) = \sum_{m'} D^{(l)}_{m'm}(R)\hat{S}_{lm'}(r), \qquad (5.195)
$$

即, $\hat{S}_{lm}(r)$ 按 $SO(3)$ 群的不可约表示 $D^{(l)}(R)$ 变换, 则称 $\hat{S}_{lm}(r)$ 为 l 阶不可约张量算符 (lth order irreducible tensor operator). 与矢量算符一样, (5.195) 式在形式上与基矢的变换、如 (5.39) 式相同, $\hat{S}_{lm}(r)$ 的列指标与 $D^{(l)}(R)$ 的行指标相收缩.

(2) l 阶不可约张量算符的拉卡定义

按不可约张量算符的定义 (5.195) 式, 可得其定义的另一种形式 —— 拉卡定义. 为此, 考虑绕 z 轴的无穷小转动 $\varepsilon\Rightarrow 0$, 由 (5.104) 式知

$$\hat{P}\left(R_z, \varepsilon\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon \hat{L}_z} \simeq 1 - \mathrm{i}\varepsilon \hat{L}_z, \tag{5.196}$$

再由 (5.86) 式知

$$D^{(l)}_{m'm}\left(0, 0, \varepsilon\right) = \delta_{m'm}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varepsilon} = \delta_{m'm}\left(1 - \mathrm{i}m\varepsilon\right). \tag{5.197}$$

将 (5.196) 与 (5.197) 两式代入 (5.195) 式得

$$\left(1 - \mathrm{i}\varepsilon \hat{L}_z\right) \hat{S}_{lm}\left(r\right) \left(1 + \mathrm{i}\varepsilon \hat{L}_z\right) = \hat{S}_{lm}\left(r\right) - \mathrm{i}\varepsilon m \hat{S}_{lm}\left(r\right),$$

或

$$\left[\hat{L}_z, \hat{S}_{lm}\left(r\right)\right] = m\hat{S}_{lm}\left(r\right). \tag{5.198}$$

结合 5.4.3 节的结果, 同样的方法可证明

$$\left[\hat{L}_\pm, \hat{S}_{lm}\left(r\right)\right] = \left[\left(l \pm m + 1\right)\left(l \mp m\right)\right]^{\frac{1}{2}} \hat{S}_{lm\pm 1}\left(r\right), \tag{5.199}$$

其中的 $\hat{L}_\pm$ 由 (5.131) 式定义, 为 $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$.

(5.198) 与 (5.199) 式给出了不可约张量算符与角动量算符的对易关系, 是定义 (5.195) 式的直接推论, 通常称为不可约张量算符 $\hat{S}_{lm}\left(r\right)$ 的拉卡定义. 任何满足上述对易关系的算符都是不可约张量算符. 按此定义, 由 (5.132) 与 (5.136) 两式知, 球谐函数 $Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)$ 是 l 阶不可约张量算符. 实际上, 由于

$$\hat{P}\left(R\right)\psi\left(r\right) = \psi\left(R^{-1}r\right), \quad \Rightarrow \hat{P}^{-1}\left(R\right)\psi\left(R^{-1}r\right) = \psi\left(r\right), \quad \Rightarrow \hat{P}^{-1}\left(R\right)\psi\left(r\right) = \psi\left(Rr\right),$$

则

$$\begin{aligned}\hat{P}\left(R\right)Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)\hat{P}^{-1}\left(R\right)\psi\left(r\right) &= \hat{P}\left(R\right)Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)\psi\left(Rr\right)\\ &\xlongequal{(4.138)\text{式}} Y_{lm}\left[R^{-1}\left(\theta, \phi\right)\right]\psi\left(r\right)\\ &\xlongequal{(5.111)\text{式}} \sum_{m'} D^{(l)}_{m'm}\left(R\right)Y_{lm'}\left(\theta, \phi\right)\psi\left(r\right),\end{aligned}$$

亦即

$$\hat{P}\left(R\right)Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)\hat{P}^{-1}\left(R\right) = \sum_{m'} D^{(l)}_{m'm}\left(R\right)Y_{lm'}\left(\theta, \phi\right),$$

满足不可约张量算符定义的 (5.195) 式. 所以球谐函数 $Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)$ 有两重角色：一是作为二维空间 (θ, ϕ) 的函数, $Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)$ 构成 $SO\left(3\right)$ 群 $2l + 1$ 维表示空间的基矢; 再者 $Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)$ 还是一 l 阶不可约张量算符, 可对波函数进行作用. 显然, $SO\left(3\right)$ 群表示空间的任意一组基矢, 如 $\psi_{jm}\left(r\right)$, 都有着这样的两重角色.

(3) 零阶不可约张量算符

零阶不可约张量算符只有一个分量 $\hat{S}_{00}(r)$, 其变换矩阵为 $D^{(0)}(R)=1$, 所以零阶不可约张量算符是标量算符.

(4) 一阶不可约张量算符

一阶不可约张量算符有三个分量 $\hat{S}_{1m}(r)\ (m=1,0,-1)$, 其变换关系为

$$\hat{P}(R)\hat{S}_{1m}(r)\hat{P}^{-1}(R)=\sum_{m'}D^{(1)}_{m'm}(R)\hat{S}_{1m'}(r). \tag{5.200}$$

由 (5.98) 式知, $D^{(1)}(R)$ 与 R 间有等价关系

$$R=MD^{(1)}(R)M^{-1},\ \text{或}\quad R_{ji}=\sum_{m'm}M_{jm'}D^{(1)}_{m'm}(R)M^{-1}_{mi}, \tag{5.201}$$

将 (5.201) 代入矢量算符变换的 (5.186) 式得

$$\hat{P}(R)\hat{A}_i(r)\hat{P}^{-1}(R)=\sum_{m'mj}M_{jm'}D^{(1)}_{m'm}(R)M^{-1}_{mi}\hat{A}_j(r). \tag{5.202}$$

上式两边同乘 M_{ik} 并对 i 求和得

$$\hat{P}(R)\left(\sum_i M_{ik}\hat{A}_i(r)\right)\hat{P}^{-1}(R)=\sum_{m'mj}D^{(1)}_{m'm}(R)\left(\sum_i M_{ik}M^{-1}_{mi}\right)M_{jm'}\hat{A}_j(r). \tag{5.203}$$

注意到

$$\sum_i M_{ik}M^{-1}_{mi}=\delta_{km}, \tag{5.204}$$

(5.203) 式变为

$$\hat{P}(R)\left(\sum_i M_{ik}\hat{A}_i(r)\right)\hat{P}^{-1}(R)=\sum_{m'}D^{(1)}_{m'k}(R)\left(\sum_j M_{jm'}\hat{A}_j(r)\right). \tag{5.205}$$

将 (5.205) 与 (5.200) 式相比较知

$$\hat{S}_{1m}(r)=\sum_{m'}M_{m'm}\hat{A}_{m'}(r), \tag{5.206}$$

或由 (5.60b) 式

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{11}(r)&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{A}_1(r)+\mathrm{i}\hat{A}_2(r)\right],\\
\hat{S}_{10}(r)&=\hat{A}_3(r),\\
\hat{S}_{1-1}(r)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{A}_1(r)-\mathrm{i}\hat{A}_2(r)\right].
\end{aligned} \tag{5.207}$$

可见, 一阶不可约张量算符与矢量算符不独立, 二者通过幺正变换 M 相联系.

(5) 不可约张量算符对波函数的作用

设 $\psi_{j_2m_2}(r_2)$ 是按不可约表示 $D^{(j_2)}$ 变换的波函数, 不可约张量算符 $\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)$ 作用在 $\psi_{j_2m_2}(r_2)$ 上后, 在 $\hat{P}(R)$ 的转动变换下有

$$\begin{aligned}\hat{P}(R)\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2) &= \hat{P}(R)\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\hat{P}^{-1}(R)\hat{P}(R)\psi_{j_2m_2}(r_2)\\ &= \sum_{m_1'} D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(R)\hat{S}_{j_1m_1'}(r_1)\sum_{m_2'} D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(R)\psi_{j_2m_2'}(r_2)\\ &= \sum_{m_1'm_2'} D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(R)D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(R)\hat{S}_{j_1m_1'}(r_1)\psi_{j_2m_2'}(r_2).\end{aligned}$$

再由 (2.49) 式得

$$\begin{aligned}&\hat{P}(R)\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2)\\ &= \sum_{m_1'm_2'}\left[D^{(j_1)}(R)\otimes D^{(j_2)}(R)\right]_{m_1'm_2',m_1m_2}\hat{S}_{j_1m_1'}(r_1)\psi_{j_2m_2'}(r_2).\end{aligned} \tag{5.208}$$

可见, $(2j_1+1)(2j_2+1)$ 个波函数 $\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2)$ 按 $SO(3)$ 群表示的直积 $D^{(j_1)}\otimes D^{(j_2)}$ 变换, 所以 $\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2)$ 不是角动量 $\hat{j}^2$ 与 $\hat{j}_z$ 的本征函数. 按 (5.157a) 式, 利用 CG 系数可将 $\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2)$ 线形组合成

$$\psi^{(S)}_{jm}(r_1,r_2) = \sum_{m_1m_2} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2), \tag{5.209}$$

其中 $j=j_1+j_2, j_1+j_2-1,\cdots,|j_1-j_2|, m=j,j-1,\cdots,-j$. 则 $\psi^{(S)}_{jm}(r_1,r_2)$ 将构成总角动量算符 $\hat{j}^2$ 与 $\hat{j}_z$ 的本征函数, 如

$$\begin{aligned}\hat{j}_z\psi^{(S)}_{jm}(r_1,r_2) &= \sum_{m_1m_2} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\hat{j}_z\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2)\\ &\overset{(5.198)\text{式}}{=\!=\!=} \sum_{m_1m_2} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\left[\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\hat{j}_z + m_1\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\right]\psi_{j_2m_2}(r_2)\\ &= \sum_{m_1m_2}(m_1+m_2)C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2)\\ &= m\sum_{m_1m_2} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\hat{S}_{j_1m_1}(r_1)\psi_{j_2m_2}(r_2),\end{aligned}$$

亦即

$$\hat{j}_z\psi^{(S)}_{jm}(r_1,r_2) = m\psi^{(S)}_{jm}(r_1,r_2). \tag{5.210}$$

同样

$$\left(\hat{j}_x \pm \mathrm{i}\hat{j}_y\right)\psi^{(S)}_{jm}(r_1,r_2) = [(j\pm m+1)(j\mp m)]^{\frac{1}{2}}\psi^{(S)}_{jm\pm 1}(r_1,r_2). \tag{5.211}$$

按不可约张量算符的拉卡定义 (5.198) 与 (5.199) 式, (5.209) 式定义的 $\psi_{jm}^{(S)}(r_1, r_2)$ 是不可约张量算符. 例如, 若取 $\hat{S}_{j_1 m_1}(r_1) = \psi_{j_1 m_1}(r_1)$, 则由 (5.157a) 式知, $\psi_{jm}^{(S)}(r_1, r_2) = \psi_{jm}(r_1, r_2)$, 变为熟悉的 $SO(3)$ 群表示空间的基矢, 是不可约张量算符.

5.6.2 维格纳–埃卡特定理

设有波函数 $\psi_{N_2 j_2 m_2}(r)$ 与 $\psi_{Njm}(r)$, 其中的 N_2 与 N 代表除 $j_2 m_2$ 或 jm 以外的其他量子数, 不可约张量算符 $\hat{S}_{j_1 m_1}(r)$ 在二者间的矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\left(\psi_{Njm}, \hat{S}_{j_1 m_1} \psi_{N_2 j_2 m_2}\right) \\
&= \left(\hat{P}(R)\psi_{Njm}, \hat{P}(R)\hat{S}_{j_1 m_1}\hat{P}^{-1}(R)\hat{P}(R)\psi_{N_2 j_2 m_2}\right) \\
&\xlongequal{(5.137)与(5.195)式} \left(\sum_{m'} D_{m'm}^{(j)}(R)\psi_{Njm'}, \sum_{m_1'} D_{m_1' m_1}^{(j_1)}(R)\hat{S}_{j_1 m_1'} \sum_{m_2'} D_{m_2' m_2}^{(j_2)}(R)\psi_{N_2 j_2 m_2'}\right) \\
&= \sum_{m' m_1' m_2'} D_{m'm}^{(j)*}(R) D_{m_1' m_1}^{(j_1)}(R) D_{m_2' m_2}^{(j_2)}(R) \left(\psi_{Njm'}, \hat{S}_{j_1 m_1'} \psi_{N_2 j_2 m_2'}\right),
\end{aligned} \tag{5.212}
$$

上式第一等号用到了算符 $\hat{P}(R)$ 的幺正性 [参见 (5.106) 式. 为简洁起见, 上式中的变量 r 没有写出, 下同]. 由 (5.163) 式知

$$
D_{m_1' m_1}^{(j_1)}(R) D_{m_2' m_2}^{(j_2)}(R) = \sum_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_{j', m_1' m_2'}^{(j_1 j_2)} D_{m_1'+m_2', m_1+m_2}^{(j')}(R) C_{j', m_1 m_2}^{(j_1 j_2)}, \tag{5.213}
$$

将 (5.213) 代入 (5.212) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&\left(\psi_{Njm}, \hat{S}_{j_1 m_1} \psi_{N_2 j_2 m_2}\right) \\
&= \sum_{j' m' m_1' m_2'} C_{j', m_1' m_2'}^{(j_1 j_2)} C_{j', m_1 m_2}^{(j_1 j_2)} D_{m'm}^{(j)*}(R) D_{m_1'+m_2', m_1+m_2}^{(j')}(R) \left(\psi_{Njm'}, \hat{S}_{j_1 m_1'} \psi_{N_2 j_2 m_2'}\right).
\end{aligned}
$$

上式两边对欧拉角 α、β、γ 加权重 $\sin\beta$ 积分, 并利用不可约表示的正交关系 (5.164) 及 (5.165) 式得

$$
\begin{aligned}
&\left(\psi_{Njm}, \hat{S}_{j_1 m_1} \psi_{N_2 j_2 m_2}\right) \\
&= \sum_{j' m' m_1' m_2'} C_{j', m_1' m_2'}^{(j_1 j_2)} C_{j, m_1 m_2}^{(j_1 j_2)} \frac{1}{2j+1} \\
&\quad \times \delta_{jj'} \delta_{m', m_1'+m_2'} \delta_{m, m_1+m_2} \left(\psi_{Njm'}, \hat{S}_{j_1 m_1'} \psi_{N_2 j_2 m_2'}\right) \\
&= C_{j, m_1 m_2}^{(j_1 j_2)} \delta_{m, m_1+m_2} \sum_{m' m_1' m_2'} \frac{1}{2j+1} C_{j, m_1' m_2'}^{(j_1 j_2)} \delta_{m', m_1'+m_2'} \left(\psi_{Njm'}, \hat{S}_{j_1 m_1'} \psi_{N_2 j_2 m_2'}\right)
\end{aligned}
$$

$$\xlongequal{(5.162)\text{式}} C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}\sum_{m'm'_1m'_2}\frac{1}{2j+1}C^{(j_1j_2)}_{jm',m'_1m'_2}\left(\psi_{Njm'},\hat{S}_{j_1m'_1}\psi_{N_2j_2m'_2}\right), \tag{5.214}$$

(5.214) 式的求和部分仅与 N、N_2、j、j_1 与 j_2 有关, 与 m、m_1 与 m_2 无关, 为简单起见, 将其记为 $S_{NN_2jj_1j_2}$, 称为不可约张量算符的约化矩阵, 则 (5.214) 式可变写成

$$\left(\psi_{Njm},\hat{S}_{j_1m_1}\psi_{N_2j_2m_2}\right)=C^{(j_1j_2)}_{jm,m_1m_2}S_{NN_2jj_1j_2}, \tag{5.215}$$

上式即为维格纳–埃卡特定理的数学形式, 表明一个不可约张量算符在角动量本征态之间的矩阵元, 等于一个 CG 系数与其约化矩阵的乘积. 这样不可约张量算符的矩阵元与 CG 系数有相同的选择定则, 即只有当

$$j=j_1+j_2,j_1+j_2-1,\cdots,|j_1-j_2|,\ m=m_1+m_2 \tag{5.216}$$

时, 不可约张量算符的矩阵元才不为零.

例 5.7　轨道角动量算符的本征值方程.

该问题在 5.4.3 节中已做过专门的讨论, 得到的结果如 (5.132) 与 (5.136) 式所示. 作为维格纳–埃卡特定理的应用, 这里将采用该定理讨论这一问题.

由 (5.207) 式知, 角动量算符 $\hat{L}_x$、$\hat{L}_y$ 与 $\hat{L}_z$ 可组合成一阶不可约张量算符

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_{11}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_x+\mathrm{i}\hat{L}_y\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}_+,\\
&\hat{S}_{10}=\hat{L}_z,\\
&\hat{S}_{1-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{L}_x-\mathrm{i}\hat{L}_y\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}_-.
\end{aligned} \tag{5.217}$$

由维格纳–埃卡特定理的 (5.215) 式知

$$\left(Y_{lm},\hat{S}_{1m_1}Y_{lm_2}\right)=C^{(1l)}_{lm,m_1m_2}S_{l1l}. \tag{5.218}$$

在 (5.218) 式中, 取 $m_1=0$ 得

$$\left(Y_{lm},\hat{S}_{10}Y_{lm_2}\right)\xlongequal{(5.217)\text{式}}\left(Y_{lm},\hat{L}_zY_{lm_2}\right)=m_2\delta_{mm_2}=C^{(1l)}_{lm,0m_2}S_{l1l}. \tag{5.219}$$

由 (5.219) 式知

$$\hat{L}_zY_{lm}{=}mY_{lm}, \tag{5.220}$$

与 (5.136) 式相一致.

在 (5.219) 式中, 取 $m_2=m$, 得

$$S_{l1l}=\frac{m}{C^{(1l)}_{lm,0m}}, \tag{5.221}$$

其中

$$C_{lm,0m}^{(1l)} \xlongequal{(5.177)\text{式}} -C_{lm,m0}^{(l1)} \xlongequal{\text{表}5.3} -\frac{m}{[l(l+1)]^{\frac{1}{2}}},$$

故

$$S_{l1l} = -[l(l+1)]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.222}$$

将 (5.222) 代入 (5.218) 式得

$$\left(Y_{lm}, \hat{S}_{1m_1} Y_{l\,m_2}\right) = -[l(l+1)]^{\frac{1}{2}} C_{lm,m_1 m_2}^{(1\,l)}, \tag{5.223}$$

则

$$\left(Y_{lm}, \hat{S}_{11} Y_{lm_2}\right) = -[l(l+1)]^{\frac{1}{2}} C_{lm,1m_2}^{(1l)}, \tag{5.224}$$

$$\left(Y_{lm}, \hat{S}_{1-1} Y_{lm_2}\right) = -[l(l+1)]^{\frac{1}{2}} C_{lm,-1m_2}^{(1l)}. \tag{5.225}$$

又

$$\begin{aligned} C_{lm,1m_2}^{(1l)} &\xlongequal{(5.177)\text{式}} -C_{lm,m_2 1}^{(l1)} \xlongequal{\text{表}5.3} \left[\frac{(l+m)(l-m+1)}{2l(l+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m,m_2+1} \\ &= \left[\frac{(l+m_2+1)(l-m_2)}{2l(l+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m,m_2+1}. \end{aligned} \tag{5.226}$$

同样

$$\begin{aligned} C_{lm,-1m_2}^{(1l)} &\xlongequal{(5.177)\text{式}} -C_{lm,m_2-1}^{(l1)} \xlongequal{\text{表}5.3} -\left[\frac{(l-m)(l+m+1)}{2l(l+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m,m_2-1} \\ &= -\left[\frac{(l-m_2+1)(l+m_2)}{2l(l+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m,m_2-1}. \end{aligned} \tag{5.227}$$

将 (5.226) 与 (5.227) 两式分别代入 (5.224) 与 (5.225) 两式得

$$\left(Y_{lm}, \hat{S}_{11} Y_{lm_2}\right) = -\left[\frac{(l+m_2+1)(l-m_2)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m,m_2+1}, \tag{5.228}$$

$$\left(Y_{lm}, \hat{S}_{1-1} Y_{lm_2}\right) = \left[\frac{(l-m_2+1)(l+m_2)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \delta_{m,m_2-1}. \tag{5.229}$$

再将 (5.217) 代入 (5.228) 与 (5.229) 两式得

$$\hat{L}_+ Y_{lm}(\theta,\phi) = [(l+m+1)(l-m)]^{\frac{1}{2}} Y_{lm+1}(\theta,\phi), \tag{5.230}$$

$$\hat{L}_- Y_{lm}(\theta,\phi) = [(l-m+1)(l+m)]^{\frac{1}{2}} Y_{lm-1}(\theta,\phi), \tag{5.231}$$

与 (5.132) 式相一致.

例 5.8 原子核 γ 跃迁的选择定则.

当原子核由激发态自发地回落到低能态时, 将辐射出能量很高的光子, 称为 γ 光子. γ 跃迁起源于核内电荷与电流的变化, 是一种电多极与磁多极辐射. 作为维格纳–埃卡特定理的另一个应用, 这里用其讨论原子核 γ 跃迁的选择定则.

计算 γ 光子的跃迁矩阵元, 通常需要计算矩阵元 $(\psi_{N_1 j_1 m_1}, Y_{lm}\psi_{N_2 j_2 m_2})$, 其中 $\psi_{N_1 j_1 m_1}(r)$ 与 $\psi_{N_2 j_2 m_2}(r)$ 为原子核的初、末两态, 由于 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 是 l 阶不可约张量算符, 按维格纳–埃卡特定理 (5.215) 式

$$(\psi_{N_1 j_1 m_1}, Y_{lm}\psi_{N_2 j_2 m_2}) = C^{(l j_2)}_{j_1 m_1, m m_2} Y_{N_1 N_2 j_1 l j_2}, \tag{5.232}$$

其中 $Y_{N_1 N_2 j_1 l j_2}$ 为约化矩阵元. 由于存在 CG 系数, 所以由 (5.156) 与 (5.161) 式知, 量子数间满足关系

$$\begin{aligned} &j_1 + j_2 \geqslant l \geqslant |j_1 - j_2|, \\ &m = m_1 - m_2, \end{aligned} \tag{5.233}$$

上式给出辐射出 γ 光子的角与磁量子数需满足的条件, 只有满足上述条件的 γ 光子才能辐射产生, 称为原子核 γ 跃迁的选择定则.

第 6 章　李代数及其表示

李群的无穷小生成元或无穷小算符构成一个代数, 称为李代数. 对于连通李群, 有限群元素可由李代数生成, 因此李代数完全决定了李群的性质, 是研究李群的重要渠道之一. 本章将对李代数的结构与性质作一简单的介绍, 包括物理上常用的 $su(l)$ 李代数的一些代数关系; 半单李代数的正则形式; 正则半单李代数根系的性质与图形表示; 正则半单李代数的表示; A_1、A_2 与 A_3 李代数表示的单权系及其本征态的夸克表示与强子的味道对称性等.

6.1　李代数及其表示

6.1.1　李代数的定义

在一般意义上, 李代数是这样定义的：设 g 是实数域 R 或复数域 C 上的一个 m 维线性空间, 对于任意的 X、$Y \in g$, 若存在映射 ϕ

$$\phi(X,Y) = [X,Y], \tag{6.1}$$

满足如下条件：

(1) 封闭性

$$[X,Y] = Z \in g. \tag{6.2}$$

(2) 线性性

$$[aX+bY,Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \quad (a、b \in R\text{或}C). \tag{6.3}$$

(3) 反对称性

$$[X,Y] = -[Y,X]. \tag{6.4}$$

(4) 雅可比恒等式

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0. \tag{6.5}$$

则称 g 为一李代数 (Lie algebra). (注：这里和以后都用小写字母代表李群的相应李代数).

应该注意的是, (6.1) 式中的符号 $[X,Y]$ 通常称为李积, 它代表的是一种抽象的代数运算, 没有确切的定义. 可以是对易运算, 即 $[X,Y] = XY - YX$, 也可以是其

他任意形式的运算, 这与群中的 “乘法运算” 一样. 如前所述, 群中的 “乘法运算” 也没有确切的定义, 它可以是普通的乘法运算, 也可以是加、减运算及其他操作等.

按上述李代数的定义, 对于李积 $[X,Y]=XY-YX$, 4.3 与 4.4 节介绍过的李群的无穷小生成元或无穷小算符构成一个李代数, 其封闭性、反对称性与雅可比恒等式可由结构常数 C_{ij}^{k} 分别由 (4.131)、(4.133) 与 (4.134) 式描述, 因此构成李代数，是一种典型的李代数. 这些无穷小生成元或无穷小算符彼此间线性独立，构成 m 维线性空间的基矢，该空间的任意矢量都可由这些基矢线性叠加而成，满足上述李代数定义的 4 个条件，也构成李代数. 下面再举几个李代数的例子.

例 6.1 设 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 是三维线性空间 L_3 中的任意两矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3,\\ \boldsymbol{Y}&=y_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+y_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+y_3\hat{\boldsymbol{e}}_3,\end{aligned}\tag{6.6}$$

其中 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_i,i=1,2,3\}$ 为基矢, 若定义李积为

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y},\tag{6.7a}$$

则

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]=(x_2y_3-x_3y_2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_1+(x_3y_1-x_1y_3)\,\hat{\boldsymbol{e}}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\,\hat{\boldsymbol{e}}_3=\boldsymbol{Z}\in L_3,\tag{6.7b}$$

满足封闭性、线性性与反对称性. 再注意到

$$\boldsymbol{X}\times(\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Y}\,(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{Z}\,(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}),\tag{6.8}$$

则

$$\boldsymbol{X}\times(\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{Y}\times(\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{X})+\boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})=0,\tag{6.9}$$

亦即

$$[\boldsymbol{X},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]]+[\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]]+[\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]]=0,\tag{6.10}$$

满足雅可比恒等式, 因此 L_3 中的所有矢量构成一个李代数, 记为 l_3. 这里的李积就是两矢量的矢积或叉积.

例 6.2 复数域 C 上的任一 3×3 反对称矩阵, 可以看成是三维线性空间 M_3 中的矢量, 该空间的三个基矢为

$$e_1=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.\tag{6.11}$$

而任意反对称矩阵 X、$Y \in M_3$ 可由三者展开为

$$X = \sum_i x_i e_i,\ Y = \sum_i y_i e_i \quad (x_i、y_i \in C). \tag{6.12}$$

注意到

$$[e_i, e_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} e_k, \tag{6.13}$$

若定义李积为

$$[X, Y] = XY - YX, \tag{6.14a}$$

则

$$[X, Y] = (x_2y_3 - x_3y_2)\, e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\, e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\, e_3 = Z \in M_3, \tag{6.14b}$$

满足封闭性、线性性与反对称性. 另外, (6.14) 式与例 6.1 中的 (6.7) 式代数关系相同, 因此雅可比恒等式也成立. 所以, M_3 中的所有 3×3 反对称矩阵构成一李代数, 记为 m_3. 这里的李积是矩阵的对易运算.

6.1.2 子代数、理想子代数与商李代数

(1) 子代数: 设有李代数 g, 若有子空间 $h \subset g$, 且对于 X、$Y \in h$, 李积 $[X, Y] \in h$, 则称 h 为 g 的子代数 (subalgebra).

(2) 阿贝尔子代数: 设 h 是子代数, 若对于 X、$Y \in h$, 有李积 $[X, Y] = 0$, 则称 h 为阿贝尔子代数 (Abel subalgebra). 对于阿贝尔子代数, 其基矢间的结构常数

$$C_{ij}^k = 0. \tag{6.15}$$

显然与阿贝尔子代数对应的子群是阿贝尔子群.

(3) 理想子代数: 亦简称理想, 也称为不变子代数. 若 h 为 g 的一个子代数且对于 $X \in h$、$Y \in g$, 李积

$$[X, Y] \in h, \tag{6.16}$$

则称 h 为 g 的理想子代数 (ideal subalgebra) 或不变子代数 (invariant subalgebra).

设李代数 g 的基矢为 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$, 若所有基矢角标的集合记为 Σ_g, 理想 h 中所有基矢角标的集合记为 Σ_h, 则由 (6.16) 式关于理想的定义知

$$[X_\alpha, X_i] = \sum_\beta C_{\alpha i}^\beta X_\beta \quad (i \in \Sigma_g, \alpha、\beta \in \Sigma_h). \tag{6.17}$$

理想子代数生成的子群为正规子群. 因为若假设 H 为理想 h 生成的子群, G 为 g 生成的群, 注意到 (4.112) 式, 有

$$X \in h, \quad \Rightarrow e^X \in H; \quad Y \in g, \quad \Rightarrow e^Y \in G. \tag{6.18}$$

由于

$$e^Y e^X e^{-Y} = \exp\left(e^Y X e^{-Y}\right),$$

而

$$e^Y X e^{-Y} = X - \frac{1}{1!}[X,Y] + \frac{1}{2!}[[X,Y],Y] + \cdots = X' \in h, \tag{6.19}$$

这样

$$e^Y e^X e^{-Y} = e^{X'} \in H. \tag{6.20}$$

注意到 e^Y、$e^{-Y} \in G$ 为互逆群元素, 按正规子群定义的 (1.76) 式, H 是 G 的正规子群.

显然, g 本身及 $\{0\}$ 也是 g 的理想, 称为 g 的显然理想. 除显然理想以外的理想称为 g 的真理想或固有理想 (proper ideal).

(4) 商李代数：设 h 为李代数 g 的理想，若 $X \in g$，但 $X \notin h$，取

$$X/h = X + h, \tag{6.21}$$

所有不同的 X/h 的集合 $\{X/h\}$ 构成一个李代数，称为商李代数 (quotient Lie algebra). 商李代数生成李群的商群 G/H.

6.1.3 李代数的直和、单纯李代数与半单李代数

1. 李代数的直和

设 $h_1, h_2, \cdots, h_m$ 都是李代数 g 的理想, 如果 g 中任一元素 X 都可唯一地表示成

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m, \tag{6.22}$$

其中 $X_i \in h_i$, 则称 g 是 $\{h_1, h_2, \cdots, h_m\}$ 的直和, 记作

$$g = h_1 \oplus h_2 \oplus \cdots \oplus h_m = \sum_{i=1}^{m}{}^{\oplus} h_i. \tag{6.23}$$

李代数的直和生成李群的直积. 直和具有如下两方面性质：

(1) $h_i \cap h_j = 0 \quad (i \neq j)$.

因为, 若 $X \in h_i \cap h_j$, 则由 $X \in h_i$ 知

$$X = 0 + 0 + \cdots + X_i + \cdots + 0_j + \cdots + 0; \tag{6.24}$$

又由 $X \in h_j$ 知

$$X = 0 + 0 + \cdots + 0_i + \cdots + X_j + \cdots + 0. \tag{6.25}$$

因为 X 是唯一的, 所以 $X = 0$, 亦即 $h_i \cap h_j = 0\,(i \neq j)$.

(2) $[X_i, X_j] = 0$, 其中 $X_i \in h_i$, $X_j \in h_j\,(i \neq j)$.

因为 h_i 与 h_j 都是理想, 所以

$$[X_i, X_j] \in h_i \cap h_j = 0. \tag{6.26}$$

2. 单纯李代数

不含有真理想的李代数称为单纯李代数 (simple Lie algebra). 单纯李代数生成单纯李群.

3. 半单李代数

不含有非零的阿贝尔理想的李代数称为半单李代数 (semisimple Lie algebra), 半单李代数生成半单李群. 由 1.6.2 节知, 非阿贝尔单纯李群的直积是半单群, 所以若干个非阿贝尔单纯李代数的直和构成半单李代数. 单纯李代数一定是半单李代数; 反之, 半单李代数不一定是单纯李代数. 例如, 非阿贝尔单纯李代数的直和是半单李代数, 但不是单纯李代数.

6.1.4 李代数的同态与同构

设 g 与 g' 是两个定义在实数域 R 或复数域 C 上的李代数, 若存在一映射 ϕ, 使得对于 X、$Y \in g$, X'、$Y' \in g'$, 有

$$\phi(X) = X', \quad \phi(Y) = Y', \tag{6.27}$$

且满足如下条件:

(1) 线性性

$$\phi\,(aX + bY) = a\phi\,(X) + b\phi\,(Y) = aX' + bY', \tag{6.28}$$

其中 a、$b \in R$ 或 C.

(2) 保持李积形式不变

$$\phi\,([X, Y]) = [\phi\,(X)\,, \phi\,(Y)] = [X', Y']\,, \tag{6.29}$$

则称 ϕ 为由 $g \Rightarrow g'$ 的同态映射, 简称同态, 记为 $g \sim g'$. 若这种映射关系是一一对应的, 则称 g 与 g' 同构, 记为 $g \approx g'$. 同态的李代数, 其代数性质是相同的, 可视为同一个李代数.

假设李代数 g 是 m 维的, 且 $X_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是该空间中的任意一组基矢, 使得

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \tag{6.30}$$

如果两个李代数同构, 则存在映射 ϕ, 满足

$$\phi\left([X_i, X_j]\right) = \left[\phi\left(X_i\right), \phi\left(X_j\right)\right] = \phi\left(C_{ij}^k X_k\right) = C_{ij}^k \phi\left(X_k\right), \tag{6.31}$$

结构常数相同. 因此有结论：若两个李代数同构, 则它们的结构常数相同; 反之, 具有相同结构常数的李代数必同构.

由此可见, 不同的李群可以有相同的结构常数, 从而与它们相应的李代数同构. 但从整体上来讲, 这些群都是完全不同的李群. 通常将具有相同结构常数的那些李群称为局域同构李群, 也就是说, 在单位元的一个小的邻域内是同构的. 例如, $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 群具有相同的结构常数 [参见 (4.87) 与 (4.98) 式], 所以与它们相应的李代数 $su(2) \approx so(3)$. 但李群 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 仅仅是局域同构的, 从整体上讲, 由 5.1.3 节的讨论知, 李群 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 是同态而非同构.

例 6.3　由例 6.1 知, L_3 中的所有矢量构成李代数 l_3; 由例 6.2 知, M_3 中的所有 3×3 反对称矩阵构成李代数 m_3. 两李代数是同构的, 即 $l_3 \approx m_3$. 因为, 对于 $\boldsymbol{X} \in l_3$

$$\boldsymbol{X} = x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3,$$

$X \in m_3$

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

另假设 $\boldsymbol{Y} \in l_3$, $Y \in m_3$, 则

$$\boldsymbol{Y} = y_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + y_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + y_3\hat{\boldsymbol{e}}_3,$$

$$Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3.$$

按李积的定义, 即 (6.7) 与 (6.14) 式

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = \left(x_2y_3 - x_3y_2\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \left(x_3y_1 - x_1y_3\right)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \left(x_1y_2 - x_2y_1\right)\hat{\boldsymbol{e}}_3,$$

$$[X, Y] = \left(x_2y_3 - x_3y_2\right)e_1 + \left(x_3y_1 - x_1y_3\right)e_2 + \left(x_1y_2 - x_2y_1\right)e_3.$$

若定义映射 $\phi\left(\hat{\boldsymbol{e}}_i\right) = e_i$, 则

$$\phi\left(\boldsymbol{X}\right) = X, \quad \phi\left(\boldsymbol{Y}\right) = Y, \tag{6.32}$$

$$\phi\left([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]\right) = \phi\left(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}\right) = [X, Y], \tag{6.33}$$

且映射是一对一的, 所以 $l_3 \approx m_3$.

6.1.5 半单李代数的卡当判据与卡西米尔算符

1. 卡当–基林度规张量与协变形式的结构常数

由结构常数, 可定义对称张量

$$g_{ij} = g_{ji} = \sum_{pq} C_{ip}^{q} C_{jq}^{p}, \tag{6.34}$$

通常称其为卡当–基林度规张量 (Cartan-Killing metric tensor). 由该度规张量, 可将结构常数的混合张量形式变写成协变 (下角标) 张量形式

$$C_{ijk} = \sum_{r} g_{ir} C_{jk}^{r}. \tag{6.35}$$

可以证明 C_{ijk} 是一完全反对称张量.

证明 由于 $C_{jk}^{r} = -C_{kj}^{r}$, 所以 $C_{ijk} = -C_{ikj}$. 下面再来证明: $C_{ijk} = -C_{jik}$. 由 (6.34) 式得

$$C_{ijk} = \sum_{pqr} C_{ip}^{q} C_{rq}^{p} C_{jk}^{r} = \sum_{pq} C_{ip}^{q} \sum_{r} C_{jk}^{r} C_{rq}^{p}. \tag{6.36}$$

由雅可比恒等式 (4.134) 式知

$$\sum_{r} C_{jk}^{r} C_{rq}^{p} + C_{kq}^{r} C_{rj}^{p} + C_{qj}^{r} C_{rk}^{p} = 0,$$

得

$$\sum_{r} C_{jk}^{r} C_{rq}^{p} = \sum_{r} C_{kq}^{r} C_{jr}^{p} + C_{qj}^{r} C_{kr}^{p}.$$

这样

$$C_{ijk} = \sum_{pqr} C_{ip}^{q} C_{kq}^{r} C_{jr}^{p} + \sum_{pqr} C_{ip}^{q} C_{qj}^{r} C_{kr}^{p}. \tag{6.37}$$

作对换 $i \Leftrightarrow j$, 得

$$C_{jik} = \sum_{pqr} C_{jp}^{q} C_{kq}^{r} C_{ir}^{p} + \sum_{pqr} C_{jp}^{q} C_{qi}^{r} C_{kr}^{p}$$

$$\begin{array}{ccc} p \longrightarrow q & \qquad & p \longleftarrow q \\ \nwarrow \ \swarrow & & \searrow \ \nearrow \\ r & & r \\ \Downarrow & & \Downarrow \end{array}$$

$$= \sum_{pqr} C_{jq}^{r} C_{kr}^{p} C_{ip}^{q} + \sum_{pqr} C_{jr}^{p} C_{pi}^{q} C_{kq}^{r}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{pqr} C_{ip}^{q} C_{qj}^{r} C_{kr}^{p} - \sum_{pqr} C_{ip}^{q} C_{kq}^{r} C_{jr}^{p} \\
&\xlongequal{(6.37)\text{式}} - C_{ijk}.
\end{aligned}
$$

所以 C_{ijk} 对于下角标是完全反对称的. 由此亦可推知 C_{ijk} 对于下角标的轮换是不变的, 即

$$
C_{ijk} = C_{jki} = C_{kij}. \tag{6.38}
$$

2. 半单李代数的卡当判据

卡当判据　一个李代数是半单的充要条件是

$$
\det\{g_{ij}\} \neq 0, \tag{6.39}
$$

该条件通常称为卡当判据 (Cartan criterion).

证明　若李代数 g 不是半单的, 则它至少含有一个阿贝尔理想, 用带撇号的角标来标记该理想中的基矢角标, 则

$$
\begin{aligned}
g_{ij'} &= \sum_{pq} C_{ip}^{q} C_{j'q}^{p} \xlongequal{(6.17)\text{式}:p\text{是理想指标}} \sum_{q} C_{ip'}^{q} C_{j'q}^{p'} \\
&\xlongequal{q\text{是理想指标}} C_{ip'}^{q'} C_{j'q'}^{p'} \xlongequal{\text{阿贝尔理想}:C_{j'q'}^{p'}=0} 0.
\end{aligned} \tag{6.40}
$$

因此, 对于非半单李代数, $\det\{g_{ij}\} \equiv 0$; 对于半单李代数, 由于不含有阿贝尔理想, (6.40) 式中的 $C_{j'q'}^{p'} \neq 0$, 因此 $\det\{g_{ij}\} \neq 0$. 这样, 可用卡当判据来判断一个李代数是否是半单的.

例 6.4　对于 $so(3)$ 李代数

$$
[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2,
$$

所以

$$
C_{12}^{3} = C_{23}^{1} = C_{31}^{2} = 1, \quad C_{21}^{3} = C_{32}^{1} = C_{13}^{2} = -1,
$$

则

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \sum_{pq} C_{1p}^{q} C_{1q}^{p} = C_{12}^{3} C_{13}^{2} + C_{13}^{2} C_{12}^{3} \\
&= 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2,
\end{aligned}
$$

同样的讨论可得

$$
g_{ij} = -2\delta_{ij}, \tag{6.41}
$$

因此

$$\det\{g_{ij}\} = -2 \neq 0. \tag{6.42}$$

所以, $so\,(3)$ 是一个半单李代数, 又因为它不含有真理想, $so\,(3)$ 也是一个单纯李代数, 因此 $SO\,(3)$ 是一个单纯李群. 另外, 由例 4.7 的讨论知, $SO\,(3)$ 是一个紧致李群, 一个紧致李群对应的李代数称为紧致李代数, 所以 $so\,(3)$ 是一个紧致李代数. 由上面的讨论知, 它的度规张量是负定的. 这个结论是具有普遍意义的, 即度规张量是负定的, 是半单李代数为紧致李代数的充要条件.

3. 半单李代数的卡西米尔算符

对于半单李代数, 由于 $\det\{g_{ij}\} \neq 0$, 矩阵 $\{g_{ij}\}$ 的逆 $\{g^{ij}\}$ 存在, 有关系

$$\sum_k g_{ik}g^{kj} = \sum_k g^{ik}g_{kj} = g_i^j = \delta_{ij}. \tag{6.43}$$

例如, 对于李代数 $so\,(3)$, $g_{ij} = -2\delta_{ij}$, 则

$$g^{ij} = -\frac{\delta^{ij}}{2}. \tag{6.44}$$

由于 g_{ij} 对下角标是对称的, g^{ij} 对上角标也是对称的. 由 (6.43) 式可得 (6.35) 式的逆变换

$$C_{ij}^k = \sum_p g^{kp}C_{pij}. \tag{6.45}$$

对于半单李代数 g, 定义算符

$$C = \sum_{ij} g^{ij}X_iX_j = \sum_{ij} g_{ij}X^iX^j = \sum_i X^iX_i, \tag{6.46}$$

其中 X_i、X_j 是 g 在 m 空间中的基矢, 通常称 (6.46) 式定义的 C 为卡西米尔 (Casimir) 算符. 对于任意的基矢 X_k, 考察李积

$$\begin{aligned}
[C, X_k] &= \sum_{ij} g^{ij}\,[X_iX_j, X_k] \\
&= \sum_{ij} g^{ij}X_i\,[X_j, X_k] + \sum_{ij} g^{ij}\,[X_i, X_k]\,X_j \\
&= \sum_{ijp} g^{ij}C_{jk}^p X_iX_p + \sum_{ijp} g^{ij}C_{ik}^p X_pX_j
\end{aligned}$$

$$i \longleftrightarrow j$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{ijp} g^{ij} C^{p}_{jk} X_i X_p + \sum_{ijp} g^{ji} C^{p}_{jk} X_p X_i \\
&= \sum_{ijp} g^{ij} C^{p}_{jk} \left(X_i X_p + X_p X_i \right),
\end{aligned}
$$

对于半单李代数, 由 (6.45) 式, 上式变为

$$
[C, X_k] = \sum_{ijpq} g^{ij} g^{pq} \left(X_i X_p + X_p X_i \right) C_{qjk}. \tag{6.47}
$$

上式中, C_{qjk} 对下角标 q、j、k 是完全反对称的. 而其中的

$$
\begin{aligned}
&\sum_{ip} g^{ij} g^{pq} \left(X_i X_p + X_p X_i \right) \\
=& \sum_{ip} g^{pq} g^{ij} \left(X_p X_i + X_i X_p \right) \\
& \qquad i \longleftrightarrow p \\
& \qquad\quad \Downarrow \\
=& \sum_{ip} g^{iq} g^{pj} \left(X_i X_p + X_p X_i \right),
\end{aligned}
$$

对于角标 q、j 的交换是对称的. 这样

$$
[C, X_k] = 0, \tag{6.48a}
$$

由于 X_k 是 g 的任一基矢，且 g 中的任一元素都是基矢的线性叠加，所以对于 g 中的任一元素，都有

$$
[C, g] = 0. \tag{6.48b}
$$

即卡西米尔算符 C 与 g 中每一元素的李积为零.

例 6.5　由 (6.44) 式知, $so(3)$ 李代数的度规张量为

$$
g^{ij} = -\frac{\delta^{ij}}{2}.
$$

按照 (6.46) 式, $so(3)$ 的卡西米尔算符为

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{ij} g^{ij} X_i X_j = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \delta^{ij} X_i X_j = -\frac{1}{2} \sum_{i} X_i X_i \\
&\xlongequal{(4.97)\ \text{式}} \frac{1}{2} \left(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \right).
\end{aligned} \tag{6.49}
$$

表明 $so(3)$ 李代数的卡西米尔算符是 (1/2) 轨道角动量算符的平方. 而 $[C, L_i] = 0$, 这是量子力学早已熟知的结果.

6.1.6 李代数的表示

一个 m 维线性空间中的抽象李代数 g, 若能找到一个 l 阶矩阵李代数 M 与它同态, 则这个矩阵李代数 M 就称为该抽象李代数 g 的表示. 具体地说, 就是存在一个同态映射 ϕ, 使得对于任意的 $X \in g$, 有

$$\phi : X \to M(X) \in GL(l, C), \tag{6.50}$$

并使得下列关系成立

(1) 线性关系，即对于任意的 X、$Y \in g$

$$M(aX + bY) = aM(X) + bM(Y) \quad (a、b \in C). \tag{6.51}$$

(2) 李积形式不变，即若

$$[X, Y] = Z \in g, \tag{6.52}$$

则

$$M([X, Y]) = [M(X), M(Y)] = M(Z) \in GL(l, C), \tag{6.53}$$

则称 M 是李代数 g 的表示.

由于李代数与李群有如 (6.18) 式所示的指数关系, 李代数的表示 $M(g)$ 与李群的表示 $D(G)$ 之间有指数关系

$$\mathrm{e}^{M(g)} = D(G). \tag{6.54}$$

这样, 只要知道了李代数 g 的表示矩阵 $M(g)$, 就可以通过上式求得李群的表示矩阵 $D(G)$. 上式亦表明: 李代数表示的维数等于李群表示的维数, 李代数的表示 $M(g)$ 也是李群的一个表示.

6.1.7 李代数的伴随表示

设有 m 维李代数 g, $X_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是该空间的任一基矢, 定义伴随映射 $\phi = \mathrm{ad}$

$$\mathrm{ad}X_i(X_j) = [X_i, X_j] = X_j^{\mathrm{ad}(i)} \quad (i \neq j; i、j = 1, 2, \cdots, m), \tag{6.55}$$

其中 X_j 为不同于 X_i 的另一基矢, $X_j^{\mathrm{ad}(i)}$ 为伴随映射后的基矢. 可见映射 ad 通过李积操作将基矢 X_j 变成新基矢 $X_j^{\mathrm{ad}(i)}$, 当 X_i 取遍 g 的所有基矢后, 将映射生成 X_j 的所有伴随基矢.

这里想做一提的是, 4.5.3 节曾讨论过李群的伴随表示, 映射对象是李群 G 的群元素, 用符号 Ad 表示. 这里, 映射对象是李代数 g 的基矢, 用符号 ad 表示. (6.55)

式的映射关系与 (4.166) 式是一致的, 因为若 (4.166) 式中的群元素 $A(\alpha)$ 在单位元附近取值, 即

$$A(\alpha) = I + \sum_i \alpha_i X_i + \cdots, \quad \Rightarrow A^{-1}(\alpha) = I - \sum_i \alpha_i X_i + \cdots, \tag{6.56}$$

代入 (4.166) 式并保留至一级小量 α_i, 即得 (6.55) 式.

由于 X_j 与 $X_j^{\mathrm{ad}(i)}$ 都是 m 维线性空间的基矢, 两者应有如 (2.3) 式的变换关系

$$X_j^{\mathrm{ad}(i)} = \sum_k M_{kj}^{\mathrm{ad}(i)} X_k, \tag{6.57}$$

按定义, (6.57) 式中的 $M^{\mathrm{ad}(i)}$ 是一种表示, 称为李代数 g 的伴随表示, 对于 m 维李代数, $M^{\mathrm{ad}(i)}$ 是 m 维的. 再由定义 (6.55) 式得

$$X_j^{\mathrm{ad}(i)} = [X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \tag{6.58}$$

(6.57) 与 (6.58) 两式表明

$$M_{kj}^{\mathrm{ad}(i)} = C_{ij}^k, \tag{6.59}$$

即李代数 g 的伴随表示就是它的结构常数.

6.2　$su(l)$ 李代数

在粒子物理中, $su(l)$ 李代数是一个很有用的工具. $su(2)$ 是描述角动量、同位旋和弱电统一规范理论的基础; $su(3)$ 是讨论量子色动力学和强子味道对称性的基础; $su(4)$ 是狄拉克代数的基础. 作为李代数举例, 本节将对 $su(l)$ 李代数的具体内容作一讨论, 给出 $su(l)$ 李代数的一些常用关系.

6.2.1　$su(l)$ 李代数

设有 l 维线性空间 L_l, 在其中定义一组 l^2-1 个线性无关且无迹的 $l\times l$ 厄米矩阵

$$\lambda_i,\ \lambda_i^\dagger = \lambda_i,\ \mathrm{Tr}\lambda_i = 0 \quad \left(i = 1, 2, \cdots, l^2-1\right), \tag{6.60}$$

它们构成一个李代数, 称为 $su(l)$ 李代数. 任一 $l\times l$ 矩阵, 如 β 可展成

$$\beta = aI + \sum_i b_i \lambda_i, \tag{6.61}$$

其中 I 为一 $l\times l$ 单位矩阵, a、$b_i \in C$ 为常数. 再如

$$\lambda_i\lambda_j = a_{ij} I + \sum_k b_{ijk}\lambda_k, \tag{6.62}$$

其中的 a_{ij}、$b_{ijk} \in C$ 为常数.

6.2.2 d 系数与 f 系数

对 (6.62) 式两边取转置共轭, 并注意到矩阵 λ_i 的厄米性 (6.60) 式, 得

$$\lambda_j\lambda_i = a_{ij}^* I + \sum_k b_{ijk}^* \lambda_k, \tag{6.63}$$

另

$$\lambda_j\lambda_i = a_{ji} I + \sum_k b_{jik} \lambda_k, \tag{6.64}$$

(6.63) 与 (6.64) 式比较知

$$a_{ij}^* = a_{ji},\ b_{ijk}^* = b_{jik}. \tag{6.65}$$

由所有的 a_{ij} 可构成 l^2-1 阶矩阵, 记为 a, (6.65) 式表明 $a^\dagger = a$, 这样 a 可对角化, 适当地选取 λ_i, 使得

$$a_{ij} = c_a \delta_{ij}, \tag{6.66}$$

其中 c_a 为一常数, 且注意到矩阵 a 的厄米性, c_a 应为一实的常数. 适当地选取 λ 矩阵的归一化, 使

$$c_a = \frac{2}{l}, \quad \Rightarrow a_{ij} = \frac{2}{l}\delta_{ij}. \tag{6.67}$$

将 b_{ijk} 分为实部与虚部

$$b_{ijk} = d_{ijk} + \mathrm{i} f_{ijk}, \tag{6.68}$$

其中的 d_{ijk} 与 f_{ijk} 分别称为 d 系数与 f 系数. 由 (6.65) 式知

$$d_{ijk} = d_{jik}, \quad f_{ijk} = -f_{jik}. \tag{6.69}$$

这样, 由 (6.67)、(6.68) 两式, (6.62) 式变为

$$\lambda_i\lambda_j = \frac{2}{l}\delta_{ij} I + \sum_k \left(d_{ijk} + \mathrm{i} f_{ijk}\right)\lambda_k, \tag{6.70}$$

由 (6.69)、(6.70) 两式得

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2\mathrm{i}\sum_k f_{ijk}\lambda_k, \tag{6.71}$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{l}\delta_{ij} I + 2\sum_k d_{ijk}\lambda_k, \tag{6.72}$$

可见, f 系数 f_{ijk} 正是李代数 $su(l)$ 的结构常数. 考虑到

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\right) = \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{2}{l}\delta_{ij} I + \sum_p b_{ijp}\lambda_p\right)\lambda_k\right] = \mathrm{Tr}\left(\sum_p b_{ijp}\lambda_p\lambda_k\right)$$

$$=\mathrm{Tr}\left[\sum_p b_{ijp}\left(\frac{2}{l}\delta_{pk}I+\sum_q b_{pkq}\lambda_q\right)\right]$$
$$=\mathrm{Tr}\left(\frac{2}{l}b_{ijk}I\right)=2b_{ijk},$$

由于 $\mathrm{Tr}\left(\lambda_i\lambda_j\lambda_k\right)$ 对于矩阵因子的轮换是不变的，所以由上式知，b_{ijk} 对于角标 i、j、k 的轮换是对称的, 再结合 (6.69) 式, 得

$$d_{ijk}=d_{jik}=d_{ikj},\quad \Rightarrow \text{完全对称张量}, \tag{6.73}$$

$$f_{ijk}=-f_{jik}=-f_{ikj},\quad \Rightarrow \text{完全反对称张量}. \tag{6.74}$$

6.2.3　几种常用的代数关系

可以证明, λ 矩阵满足关系

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda_i\lambda_j\right)=2\delta_{ij}, \tag{6.75}$$

$$\sum_i\lambda_i\lambda_i=\frac{2}{l}\left(l^2-1\right)I, \tag{6.76}$$

d 系数与 f 系数满足关系

$$\sum_i d_{iik}=0, \tag{6.77}$$

$$\sum_{ij}f_{ijp}f_{ijq}=l\delta_{pq},\ \text{或}\ \sum_{ijk}f_{ijk}f_{ijk}=l\left(l^2-1\right). \tag{6.78}$$

与 (6.60) 式一样, (6.75)~(6.78) 式各量角标的取值范围为 i、j、k、p、$q=1,2,\cdots,l^2-1$.

例 6.6　证明 (6.75)~(6.78) 式.

证明　由于

$$\mathrm{Tr}\lambda_i=0,$$

由 (6.70) 式得

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda_i\lambda_j\right)=2\delta_{ij},\quad \Rightarrow \text{(6.75)式得证}.$$

注意到

$$\left[\sum_i\lambda_i\lambda_i,\lambda_j\right]=\sum_i\lambda_i\left[\lambda_i,\lambda_j\right]+\sum_i\left[\lambda_i,\lambda_j\right]\lambda_i$$
$$=2\mathrm{i}\sum_{ik}f_{ijk}\left\{\lambda_i,\lambda_k\right\}=0. \tag{6.79}$$

最后等号得自于反对称张量 f_{ijk} 与对称张量 $\{\lambda_i, \lambda_k\}$ 相乘并对角标求和恒为零的结果. 上式是显然的, 因为 $\sum\limits_i \lambda_i\lambda_i$ 是 $su(l)$ 李代数的卡西米尔算符 [参见 (6.46) 式], 它与各生成元对易 [参见 (6.48) 式]. 这样, 由舒尔定理 1 知, $\sum\limits_i \lambda_i\lambda_i$ 应为常数矩阵, 即

$$\sum_i \lambda_i\lambda_i = c_\lambda I, \tag{6.80}$$

其中 c_λ 为一常数, 为了确定它, (6.80) 式两边求迹得

$$\mathrm{Tr}\sum_i \lambda_i\lambda_i = c_\lambda l. \tag{6.81}$$

再者, 令 (6.75) 式中的 $i = j$, 并对 i 求和, 有

$$\mathrm{Tr}\sum_i \lambda_i\lambda_i = 2\left(l^2 - 1\right). \tag{6.82}$$

比较 (6.81) 与 (6.82) 两式知

$$c_\lambda = \frac{2}{l}\left(l^2 - 1\right),$$

代入 (6.80) 式得

$$\sum_i \lambda_i\lambda_i = \frac{2}{l}\left(l^2 - 1\right) I, \quad \Rightarrow (6.76)\text{式得证}.$$

在 (6.70) 式中, 令 $i = j$ 并对 i 求和得

$$\sum_i \lambda_i\lambda_i = \frac{2}{l}\left(l^2 - 1\right) I + \sum_{ik} d_{iik}\lambda_k, \tag{6.83}$$

将 (6.83) 与 (6.76) 式相比较知

$$\sum_{ik} d_{iik}\lambda_k = 0, \quad \Rightarrow \sum_i d_{iik} = 0, \quad \Rightarrow (6.77)\text{式得证}.$$

(6.78) 式的证明要麻烦得多, 过程如下：

(1) 记

$$\left(F_i\right)_{jk} = \mathrm{i} f_{ijk} \quad \left(i、j、k = 1, 2, \cdots, l^2 - 1\right), \tag{6.84}$$

它是 $\left(l^2 - 1\right) \times \left(l^2 - 1\right)$ 矩阵, 由 (6.71) 式知, F_i 是李代数 $su\,(l)$ 的结构常数或伴随表示, 满足雅可比恒等式

$$\sum_k f_{ijk} f_{kpq} + f_{jpk} f_{kiq} + f_{pik} f_{kjq} = 0, \tag{6.85}$$

或

$$\sum_k f_{ipk}f_{jkq} - f_{jpk}f_{ikq} = -\sum_k f_{ijk}f_{kpq}, \tag{6.86}$$

或按照 (6.84) 式

$$\sum_k (F_i)_{pk}(F_j)_{kq} - (F_j)_{pk}(F_i)_{kq} = -\mathrm{i}\sum_k f_{ijk}(F_k)_{pq},$$

亦即

$$[F_i, F_j] = -\mathrm{i}\sum_k f_{ijk}F_k, \tag{6.87}$$

这样, 与 (6.79) 式一样

$$\left[\sum_i F_iF_i, F_j\right] = 0, \tag{6.88}$$

由舒尔定理 1 知, $\sum\limits_i F_iF_i$ 应为常数矩阵

$$\sum_i F_iF_i = c_F I, \tag{6.89a}$$

其中 c_F 为一常数, 其分量形式为

$$\sum_{ij}(F_i)_{pj}(F_i)_{jq} = c_F\delta_{pq}, \quad \xrightarrow{(6.84)\text{式}} -\sum_{ij} f_{ipj}f_{ijq} = c_F\delta_{pq},$$

亦即

$$\sum_{ij} f_{ijp}f_{ijq} = c_F\delta_{pq}, \tag{6.89b}$$

或

$$\sum_{ijk} f_{ijk}f_{ijk} = c_F\left(l^2-1\right). \tag{6.89c}$$

(2) 为了确定上式中的常数 c_F, 考虑 l 维空间内的一组行矢量 $\eta_1,\eta_2,\cdots$ 与一组列矢量 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots$, 按照 (6.61) 式, $l\times l$ 矩阵 $\zeta_1\eta_1$ 可写成

$$\zeta_1\eta_1 = aI + \sum_i b_i\lambda_i, \tag{6.90}$$

其中的 a 与 b_i 均为常数. 上式两边求迹, 并注意到 $\mathrm{Tr}\lambda_i = 0$, 得

$$a = \frac{1}{l}\mathrm{Tr}\left(\zeta_1\eta_1\right) = \frac{1}{l}\mathrm{Tr}\left(\eta_1\zeta_1\right) = \frac{1}{l}\left(\eta_1\zeta_1\right), \tag{6.91}$$

再用 λ_j 右乘 (6.90) 式两边并求迹得

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\zeta_1\eta_1\lambda_j) &= \sum_i b_i \operatorname{Tr}(\lambda_i\lambda_j) \xlongequal{(6.75)\text{式}} 2b_j,\\ \Rightarrow b_i &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\zeta_1\eta_1\lambda_i) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\eta_1\lambda_i\zeta_1)\\ &= \frac{1}{2}(\eta_1\lambda_i\zeta_1).\end{aligned} \tag{6.92}$$

将 (6.91) 与 (6.92) 式代入 (6.90) 式得

$$\zeta_1\eta_1 = \frac{1}{l}(\eta_1\zeta_1)I + \frac{1}{2}\sum_i (\eta_1\lambda_i\zeta_1)\lambda_i. \tag{6.93}$$

上式左乘 η_2, 右乘 ζ_2 得

$$(\eta_2\zeta_1)(\eta_1\zeta_2) = \frac{1}{l}(\eta_1\zeta_1)(\eta_2\zeta_2) + \frac{1}{2}\sum_i (\eta_1\lambda_i\zeta_1)(\eta_2\lambda_i\zeta_2). \tag{6.94}$$

选取 η_k, 使其只在 p_k 列处为 1, 其余各列都为 0. 选取 ζ_k, 使其只在 q_k 行处为 1, 其余各行都为 0, 这里的 p_k 与 q_k 取 $1,2,\cdots,l$ 中的之一值. 这样, (6.93) 式变为

$$\zeta_1\eta_1 = \frac{1}{l}\delta_{p_1q_1}I + \frac{1}{2}\sum_i (\lambda_i)_{p_1q_1}\lambda_i, \tag{6.95}$$

(6.94) 式变为

$$\delta_{p_1q_2}\delta_{p_2q_1} = \frac{1}{l}\delta_{p_1q_1}\delta_{p_2q_2} + \frac{1}{2}\sum_i (\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_i)_{p_2q_2},$$

或

$$\sum_i (\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_i)_{p_2q_2} = 2\delta_{p_1q_2}\delta_{p_2q_1} - \frac{2}{l}\delta_{p_1q_1}\delta_{p_2q_2}. \tag{6.96}$$

再者

$$\begin{aligned}(\eta_3\zeta_1)(\eta_1\zeta_2)(\eta_2\zeta_3) &= \delta_{p_1q_2}\delta_{p_2q_3}\delta_{p_3q_1} = \eta_3(\zeta_1\eta_1)(\zeta_2\eta_2)\zeta_3\\ &\xlongequal{(6.95)\text{式}} \eta_3\left[\frac{1}{l}\delta_{p_1q_1}I + \frac{1}{2}\sum_i (\lambda_i)_{p_1q_1}\lambda_i\right]\\ &\quad\times\left[\frac{1}{l}\delta_{p_2q_2}I + \frac{1}{2}\sum_j (\lambda_j)_{p_2q_2}\lambda_j\right]\zeta_3\\ &= \frac{1}{l^2}\delta_{p_1q_1}\delta_{p_2q_2}\delta_{p_3q_3} + \frac{1}{2l}\delta_{p_1q_1}\sum_i (\lambda_i)_{p_2q_2}(\lambda_i)_{p_3q_3}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2l}\delta_{p_2q_2}\sum_i(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_i)_{p_3q_3}$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{ij}(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_j)_{p_2q_2}\eta_3\lambda_i\lambda_j\zeta_3. \tag{6.97}$$

由 (6.70) 式, (6.97) 式中的

$$\eta_3\lambda_i\lambda_j\zeta_3=\frac{2}{l}\delta_{ij}\delta_{p_3q_3}+\sum_k(d_{ijk}+\mathrm{i}f_{ijk})(\lambda_k)_{p_3q_3}. \tag{6.98}$$

由 (6.97) 与 (6.98) 两式得

$$\begin{aligned}&\sum_{ijk}(d_{ijk}+\mathrm{i}f_{ijk})(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_j)_{p_2q_2}(\lambda_k)_{p_3q_3}\\ =&4\left(\delta_{p_1q_2}\delta_{p_2q_3}\delta_{p_3q_1}-\frac{1}{l^2}\delta_{p_1q_1}\delta_{p_2q_2}\delta_{p_3q_3}\right)\\ &-\frac{2}{l}\Bigg[\delta_{p_1q_1}\sum_i(\lambda_i)_{p_2q_2}(\lambda_i)_{p_3q_3}+\delta_{p_2q_2}\sum_i(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_i)_{p_3q_3}\\ &+\delta_{p_3q_3}\sum_i(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_i)_{p_2q_2}\Bigg].\end{aligned}$$

再由 (6.96) 式, 上式变为

$$\begin{aligned}&\sum_{ijk}(d_{ijk}+\mathrm{i}f_{ijk})(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_j)_{p_2q_2}(\lambda_k)_{p_3q_3}\\ =&4\left(\delta_{p_1q_2}\delta_{p_2q_3}\delta_{p_3q_1}+\frac{2}{l^2}\delta_{p_1q_1}\delta_{p_2q_2}\delta_{p_3q_3}\right)\\ &-\frac{4}{l}\left(\delta_{p_1q_1}\delta_{p_2q_3}\delta_{p_3q_2}+\delta_{p_1q_3}\delta_{p_2q_2}\delta_{p_3q_1}+\delta_{p_1q_2}\delta_{p_2q_1}\delta_{p_3q_3}\right).\end{aligned} \tag{6.99}$$

又

$$\begin{aligned}&\sum_{ijk}(d_{ikj}+\mathrm{i}f_{ikj})(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_j)_{p_2q_2}(\lambda_k)_{p_3q_3}\\ =&\sum_{ijk}(d_{ijk}-\mathrm{i}f_{ijk})(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_j)_{p_2q_2}(\lambda_k)_{p_3q_3}\\ \xlongequal{j\Leftrightarrow k}&\sum_{ijk}(d_{ijk}+\mathrm{i}f_{ijk})(\lambda_i)_{p_1q_1}(\lambda_j)_{p_3q_3}(\lambda_k)_{p_2q_2}\\ \xlongequal{(6.99)\text{式}}&4\left(\delta_{p_1q_3}\delta_{p_3q_2}\delta_{p_2q_1}+\frac{2}{l^2}\delta_{p_1q_1}\delta_{p_3q_3}\delta_{p_2q_2}\right)\\ &-\frac{4}{l}\left(\delta_{p_1q_1}\delta_{p_3q_2}\delta_{p_2q_3}+\delta_{p_1q_2}\delta_{p_3q_3}\delta_{p_2q_1}+\delta_{p_1q_3}\delta_{p_3q_1}\delta_{p_2q_2}\right).\end{aligned} \tag{6.100}$$

(6.99) 减 (6.100) 式得

$$\sum_{ijk} f_{ijk} (\lambda_i)_{p_1q_1} (\lambda_j)_{p_2q_2} (\lambda_k)_{p_3q_3} = 2\mathrm{i} \left(\delta_{p_1q_3}\delta_{p_3q_2}\delta_{p_2q_1} - \delta_{p_1q_2}\delta_{p_2q_3}\delta_{p_3q_1}\right). \quad (6.101)$$

在上式, 令 $q_1 = p_2$ 并对 p_2 求和得

$$\sum_{ijk} f_{ijk} (\lambda_i\lambda_j)_{p_1q_2} (\lambda_k)_{p_3q_3} = 2\mathrm{i} \left(l\delta_{p_1q_3}\delta_{p_3q_2} - \delta_{p_1q_2}\delta_{p_3q_3}\right). \quad (6.102)$$

另由 (6.70) 式知

$$(\lambda_i\lambda_j)_{p_1q_2} = \frac{2}{l}\delta_{ij}\delta_{p_1q_2} + \sum_r \left(d_{ijr} + \mathrm{i}f_{ijr}\right)(\lambda_r)_{p_1q_2}, \quad (6.103)$$

将其代入 (6.102) 式, 并注意到 δ_{ij} 与 d_{ijr} 对角标的完全对称性与 f_{ijr} 对角标的完全反对称性, 得

$$\sum_{ijkr} f_{ijk}f_{ijr} (\lambda_r)_{p_1q_2} (\lambda_k)_{p_3q_3} = 2l\left(\delta_{p_1q_3}\delta_{p_3q_2} - \frac{1}{l}\delta_{p_1q_2}\delta_{p_3q_3}\right). \quad (6.104)$$

由 (6.89b) 式知

$$\sum_{ij} f_{ijk}f_{ijr} = c_F\delta_{kr},$$

(6.104) 式左边变为

$$\begin{aligned} c_F\sum_{kr}\delta_{kr} (\lambda_r)_{p_1q_2} (\lambda_k)_{p_3q_3} &= c_F\sum_k (\lambda_k)_{p_1q_2} (\lambda_k)_{p_3q_3} \\ &\overset{(6.96)\text{式}}{=\!=\!=} 2c_F\left(\delta_{p_1q_3}\delta_{p_3q_2} - \frac{1}{l}\delta_{p_1q_2}\delta_{p_3q_3}\right), \end{aligned}$$

等于 (6.104) 式右边, 得

$$c_F = l, \quad (6.105)$$

代入 (6.89) 式得

$$\sum_{ij} f_{ijp}f_{ijq} = l\delta_{pq}, \text{ 或 } \sum_{ijk} f_{ijk}f_{ijk} = l\left(l^2-1\right), \quad \Rightarrow (6.78)\text{式得证}.$$

例 6.7 $su(2)$ 李代数.

对于 $su(2)$ 李代数, $l = 2$, 其 λ 矩阵是如 (4.84) 式所示的 $l^2 - 1 = 3$ 个泡利矩阵, 即

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.106)$$

满足如 (4.85) 式所示的对易关系, 即

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2\mathrm{i}\sum_k\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{6.107}$$

另

$$\{\sigma_i,\sigma_j\}=2\delta_{ij}. \tag{6.108}$$

所以由 (6.71) 与 (6.72) 两式知, $su(2)$ 李代数的 d 系数为零, f 系数为完全反对称张量 $f_{ijk}=\varepsilon_{ijk}$. 由关系 (6.75)~(6.78) 式知

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma_i\sigma_j)=2\delta_{ij}, \tag{6.109}$$

$$\sum_i(\sigma_i\sigma_i)=3I, \tag{6.110}$$

$$\sum_{ij}\varepsilon_{ijp}\varepsilon_{ijq}=2\delta_{pq},\ \text{或}\ \sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6, \tag{6.111}$$

其中的 i、j、k、p、$q=1,2,3$.

例 6.8　$su(3)$ 李代数.

对于 $su(3)$ 李代数, $l=3$, 其 λ 矩阵是如 (4.103) 式所示的 $l^2-1=8$ 个盖尔曼矩阵, 满足如 (4.104) 式的对易关系, 不为零的 f 系数由 (4.105) 式给出, d 系数由 (6.72) 式确定, 即

$$\{\lambda_i,\lambda_j\}=\frac{4}{3}\delta_{ij}I+2\sum_k d_{ijk}\lambda_k, \tag{6.112}$$

不为零的 d 系数如表 6.1 所示. 该表同时也列出了 f 系数.

表 6.1　$su(3)$ 李代数的 d 系数与 f 系数

ijk	118	146	157	228	247	256	338	344	355	366	377	448	558	668	778	888
d_{ijk}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678							
f_{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$							

另由关系 (6.75)~(6.78) 式知

$$\mathrm{Tr}\,(\lambda_i\lambda_j)=2\delta_{ij}, \tag{6.113}$$

$$\sum_i(\lambda_i\lambda_i)=\frac{16}{3}I, \tag{6.114}$$

$$\sum_{ij} f_{ijp} f_{ijq} = 3\delta_{pq}, \text{ 或 } \sum_{ijk} f_{ijk} f_{ijk} = 24, \tag{6.115}$$

其中的 i、j、k、p、$q = 1, 2, \cdots, 8$.

6.3　半单李代数的正则形式

李代数的基矢可以有不同的选择, 当用一组新基矢代替旧基矢时, 相应李代数的结构常数将发生变化. 设李代数 g 的 m 个基矢为 $X_i(i = 1, 2, \cdots, m)$, 满足关系

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \tag{6.116}$$

其中 C_{ij}^k 是这组基矢下的结构常数. 若将 X_i 变写成

$$Y_i = \sum_j a_i^j X_j, \tag{6.117}$$

其中 $\det\left\{a_i^j\right\} \neq 0$, 则对于新基矢

$$\begin{aligned}[Y_i, Y_j] &= \sum_{kl} a_i^k a_j^l [X_k, X_l] = \sum_{klm} a_i^k a_j^l C_{kl}^m X_m \\ &= \sum_{klmn} a_i^k a_j^l C_{kl}^m \left(a_n^m\right)^{-1} Y_n = \sum_n {C'}_{ij}^n Y_n,\end{aligned}$$

表明新基矢 Y_i 的结构常数为

$${C'}_{ij}^n = \sum_{klm} a_i^k a_j^l C_{kl}^m \left(a_n^m\right)^{-1}. \tag{6.118}$$

因此, 李代数的基矢变化时, 相应的结构常数将发生变化. 这就产生了一个问题: 选择什么样的基矢可使结构常数较简单呢? 本节将介绍半单李代数在正则基矢下的正则形式.

6.3.1　半单李代数的正则形式

设 A 为 m 维代数空间的任一固定矢量 (注: 按习惯或 2.1.3 节中的规定, 抽象代数空间中的矢量用简单的斜体字母表示)

$$A = \sum_i a^i X_i, \tag{6.119}$$

其中 $\{X_i\}\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是半单李代数 g 的一组基矢, 满足李积 (6.116) 式. 另取 m 维代数空间中的任一矢量

$$F=\sum_i f^i X_i. \tag{6.120}$$

作李积 $[A,F]$, 并将其视作 A 对 F 的作用, 作用后的结果仍为 m 维代数空间中的矢量, 所以有本征值方程

$$[A,F]=\rho F. \tag{6.121}$$

将 (6.119) 与 (6.120) 代入 (6.121) 式得

$$\sum_{ij} a^i f^j [X_i,X_j]=\sum_{ijk} a^i f^j C_{ij}^k X_k=\rho\sum_k f^k X_k.$$

由于 X_k 是任意的, 上式变为

$$\sum_{ij} a^i f^j C_{ij}^k=\rho f^k,$$

亦即

$$\sum_j\left(\sum_i a^i C_{ij}^k-\rho g_j^k\right)f^j=0. \tag{6.122}$$

由于 f^j 不全为零, 得久期方程 (secular equation)

$$\det\left|\sum_i a^i C_{ij}^k-\rho g_j^k\right|=0. \tag{6.123}$$

解这个方程可得 m 个本征值 ρ, 每一个本征值称为一个根, m 维李代数共有 m 个根. 将这 m 个根代回到本征值方程 (6.122) 式, 可得 m 个本征矢量 F. 如果这 m 个本征矢量线性无关, 就可以用它们作为 m 维代数空间的基矢. 那么, 由久期方程 (6.123) 式得到的根具有什么特点呢? 这由如下的卡当定理描述:

定理 6.1—— 卡当定理　适当地选择矢量 A, 使久期方程 (6.123) 式具有最大数目的非重根, 那么对于半单李代数就只有 $\rho=0$ 的重根, 除此之外都是非重根.

设定理 6.1 中 $\rho=0$ 的重根数 (即 $\rho=0$ 的简并度) 为 r, 则称 r 为该半单李代数的秩 (rank). 记 $\rho=0$ 的本征矢为 $H=\{H_{i'}\}\,(i'=1,2,\cdots,r)$, 它们彼此间线性无关, 构成一个 r 维代数子空间, 有

$$[A,H_{i'}]=0, \tag{6.124}$$

其余的 $m-r$ 个非零根 (非简并) 对应的本征矢记为 E_α, 它们构成 $m-r$ 维代数子空间, 则

$$[A,E_\alpha]=\alpha E_\alpha, \tag{6.125}$$

其中 α 是根向量, 共有 $m-r$ 个. 这里用希腊字母, 如 α、β 等标记非零的根向量, 与之相应的基矢用字母 E 表示; 用带撇号的拉丁字母, 如 i'、j' 等表示 r 维子空间中各量的上、下角标, 用字母 H 表示该子空间的基矢. m 个态矢的集合 $F=\{F_i\}=\{E_\alpha, H_{i'}\}$ 通常称为半单李代数的正则基 (canonical basis), 或卡当–韦尔 (Cartan-Weyl) 基. 由它们构成的半单李代数称为半单李代数的正则形式.

6.3.2 正则半单李代数的结构常数

1. 结构常数 $C_{i'j'}^{k'}$

由雅可比恒等式知

$$[A,[H_{i'},H_{j'}]]+[H_{i'},[H_{j'},A]]+[H_{j'},[A,H_{i'}]]=0,$$

由 (6.124) 式知, 上式中的第 2、3 项为零, 故第 1 项

$$[A,[H_{i'},H_{j'}]]=0, \tag{6.126}$$

表明

$$[H_{i'},H_{j'}]\in H, \tag{6.127}$$

这样, H 构成正则李代数 g 的一个子代数, 称为卡当子代数. 可以证明该子代数是一个阿贝尔子代数, 限于本书的范围, 该结论的证明这里不再给出, 有兴趣的读者可参阅其他书籍. 这样

$$[H_{i'},H_{j'}]=\sum_{k'}C_{i'j'}^{k'}H_{k'}=0, \tag{6.128}$$

故得结构常数

$$C_{i'j'}^{k'}=0. \tag{6.129}$$

2. 结构常数 $C_{i'\alpha}^{i}$

由雅可比恒等式

$$[A,[H_{i'},E_\alpha]]+[H_{i'},[E_\alpha,A]]+[E_\alpha,[A,H_{i'}]]=0,$$

注意到 (6.124) 与 (6.125) 两式得

$$[A,[H_{i'},E_\alpha]]=\alpha\,[H_{i'},E_\alpha]\,.$$

因此 $[H_{i'},E_\alpha]$ 亦为 A 的本征矢, 本征值亦为 α. 但由于 α 是非简并的, 即与 α 对应的只能是一个本征矢. 因此, $[H_{i'},E_\alpha]$ 与 E_α 应属于同一本征矢, 二者最多差一个常数, 即

$$[H_{i'},E_\alpha]=\sum_i C_{i'\alpha}^{i}F_i=\alpha_{i'}E_\alpha, \tag{6.130}$$

得结构常数

$$C_{i'\alpha}^{i} = \alpha_{i'}\delta_{\alpha}^{i}. \tag{6.131}$$

由 (6.124) 与 (6.128) 两式知

$$A = \sum_{i'} a^{i'} H_{i'}, \tag{6.132}$$

这样

$$\begin{aligned}[A, E_\alpha] &= \sum_{i'} a^{i'} [H_{i'}, E_\alpha] \\ &\xlongequal{(6.130)\text{式}} \sum_{i'} a^{i'} \alpha_{i'} E_\alpha \xlongequal{(6.125)\text{式}} \alpha E_\alpha,\end{aligned}$$

故

$$\alpha = \sum_{i'} \alpha_{i'} a^{i'}. \tag{6.133}$$

可见, $m-r$ 个根向量 α 都是 r 维子空间中的矢量, $\alpha_{i'}$ 是 α 的第 i' 个协变分量, $a^{i'}$ 是 r 维子空间的基矢.

3. 结构常数 $C_{\alpha\beta}^{i}$

由雅可比恒等式

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, A]] + [E_\beta, [A, E_\alpha]] = 0,$$

$$\begin{array}{cc} (6.125)\text{式} & (6.125)\text{式} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ -\beta E_\beta & \alpha E_\alpha \end{array}$$

得

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha + \beta)\,[E_\alpha, E_\beta]\,, \tag{6.134}$$

分 3 种情况:

(1) 当 $\alpha + \beta \neq 0$ 时, (6.134) 式表明, $[E_\alpha, E_\beta]$ 是 A 的本征值为 $\alpha + \beta$ 的本征矢. 因此

$$[E_\alpha, E_\beta] = \sum_i C_{\alpha\beta}^{i} F_i = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}, \tag{6.135}$$

其中 $N_{\alpha\beta}$ 为一常数, 得结构常数

$$C_{\alpha\beta}^{i} = N_{\alpha\beta}\delta_{\alpha+\beta}^{i} \quad (\alpha + \beta \neq 0)\,. \tag{6.136}$$

(2) 若 $\alpha + \beta = 0$, 则由 (6.124) 与 (6.134) 式知, $[E_\alpha, E_\beta]$ 应为 $H_{i'}$ 的线性组合, 即

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{i'} C^i_{\alpha-\alpha} F_i = \sum_{i'} C^{i'}_{\alpha-\alpha} H_{i'}, \tag{6.137}$$

表明

$$C^\beta_{\alpha-\alpha} = 0, \quad C^{i'}_{\alpha-\alpha} \neq 0. \tag{6.138}$$

(3) 其他情况

$$C^i_{\alpha\beta} = 0 \quad \left(\alpha + \beta \neq i \text{ 或 } \alpha + \beta \neq 0\right). \tag{6.139}$$

4. **结构常数 $C^{i'}_{\alpha-\alpha}$**

(1) 根的对称性

由式 (6.34) 可知

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{ij} C^j_{\alpha i} C^i_{\beta j}$$

$$= \quad \sum_{i'j} C^j_{\alpha i'} C^{i'}_{\beta j} \quad + \quad \sum_{\tau j} C^j_{\alpha\tau} C^\tau_{\beta j} \quad + \quad \sum_j C^j_{\alpha-\alpha} C^{-\alpha}_{\beta j}$$

(6.131)式 : $C^j_{\alpha i'} = -\alpha_{i'}\delta^j_\alpha$; (6.136)式 : $C^j_{\alpha\tau} = N_{\alpha\tau}\delta^j_{\alpha+\tau}$; (6.138)式 : $C^\beta_{\alpha-\alpha} = 0, C^{i'}_{\alpha-\alpha} \neq 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$= -\sum_{i'} \alpha_{i'} C^{i'}_{\beta\alpha} \quad + \quad \sum_\tau N_{\alpha\tau} C^\tau_{\beta\alpha+\tau} \quad + \quad \sum_{i'} C^{i'}_{\alpha-\alpha} C^{-\alpha}_{\beta i'},$$

由 (6.138) 式知, 上式第一项中的 $C^{i'}_{\beta\alpha}$; 由 (6.136) 式知, 上式第二项中的 $C^\tau_{\beta\alpha+\tau}$; 由 (6.131) 式知, 上式第三项中的 $C^{-\alpha}_{\beta i'}$, 都只有在 $\beta = -\alpha$ 时才不为零; 反之, 若 $-\alpha$ 不是根, 则 $\det\{g_{\alpha\beta}\} = 0$, 与半单李代数的卡当判据 (6.39) 式相悖, 因此得结论:

定理 6.2 一个半单李代数, 若 α 是一个不为零的根, 则 $-\alpha$ 也一定是它的根.

该定理揭示了正则半单李代数根系的对称性: 不为零的根总是正、负成对出现的，这对于根系的确定将带来很大的方便.

(2) 正则半单李代数的卡当 - 基林度规张量

由于 $g_{\alpha\beta}$ 与结构常数有关, 而结构常数又与李代数基矢的选取有关, 因此 $g_{\alpha-\alpha}$ 与基矢 E_α 的选取有关. 适当地选取 E_α, 可使 $g_{\alpha-\alpha}$ 归一化为

$$g_{\alpha-\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{6.140}$$

又因为

$$g_{\alpha i'} = g_{i'\alpha} = \sum_{ij} C^j_{\alpha i} C^i_{i'j}$$

$$\xlongequal{(6.129)式}\sum_{i\beta}C^{\beta}_{\alpha i}C^{i}_{i'\beta}$$

$$\xlongequal{(6.131)式}\sum_{i\beta}C^{\beta}_{\alpha i}\beta_{i'}\delta^{i}_{\beta}=\sum_{\beta}C^{\beta}_{\alpha\beta}\beta_{i'},$$

再由 (6.139) 式知

$$g_{\alpha i'}=g_{i'\alpha}=0, \tag{6.141}$$

这样

$$g_{ij}=\left(\begin{array}{c:c} g_{i'j'} & 0 \\ \hdashline 0 & g_{\alpha\beta}\end{array}\right)$$

$$=\begin{array}{c} \\ \alpha \\ -\alpha \\ \vdots \\ \beta \\ -\beta \end{array}\left(\begin{array}{c:cccccc} g_{i'j'} & & & 0 & & & \\ \hdashline & 0 & 1 & & & & \\ & 1 & 0 & & & 0 & \\ 0 & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{array}\right), \tag{6.142}$$

（矩阵上方列标：$\alpha\ -\alpha\ \cdots\ \beta\ -\beta$）

其中

$$g_{i'j'}=\sum_{ij}C^{j}_{i'i}C^{i}_{j'j}\xlongequal{(6.129)式}\sum_{\alpha\beta}C^{\beta}_{i'\alpha}C^{\alpha}_{j'\beta}$$

$$\xlongequal{(6.131)式}\sum_{\alpha\beta}\alpha_{i'}\beta_{j'}\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta}=\sum_{\alpha}\alpha_{i'}\alpha_{j'}, \tag{6.143}$$

表明 $g_{i'j'}$ 是由根向量 α 构成的 r 维子空间的度规张量.

由于 $\det\{g_{ij}\}\neq 0$, 可引进 $\{g_{i'j'}\}$ 的逆矩阵 $\left\{g^{i'j'}\right\}$, 使得

$$\sum_{k'}g^{i'k'}g_{k'j'}=\delta^{i'}_{j'}. \tag{6.144}$$

(3) 结构常数 $C^{i'}_{\alpha-\alpha}$

由 (6.45) 式得

$$C^{i'}_{\alpha-\alpha}=\sum_{k}g^{i'k}C_{k\alpha-\alpha}\xlongequal{(6.141)式}\sum_{k'}g^{i'k'}C_{k'\alpha-\alpha}=\sum_{k'}g^{i'k'}C_{-\alpha k'\alpha}$$

$$\xlongequal{(6.35)式}\sum_{k'p}g^{i'k'}g_{p-\alpha}C^{p}_{k'\alpha}\xlongequal{(6.141)式}\sum_{k'\beta}g^{i'k'}g_{\beta-\alpha}C^{\beta}_{k'\alpha}$$

$$\overset{(6.140)\text{式}}{=\!=\!=}\sum_{k'} g^{i'k'} C^{\alpha}_{k'\alpha} \overset{(6.131)\text{式}}{=\!=\!=}\sum_{k'} g^{i'k'} \alpha_{k'},$$

可见

$$C^{i'}_{\alpha-\alpha} = \alpha^{i'}. \tag{6.145}$$

这样 (6.137) 式变为

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_{i'} \alpha^{i'} H_{i'}. \tag{6.146}$$

6.3.3 正则半单李代数的李积

总结前面所得的结果, 可得正则半单李代数的李积

$$\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0,\\
&[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha,\\
&[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta},\\
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_i \alpha^i H_i.
\end{aligned} \tag{6.147}$$

其中拉丁字母 i、$j = 1, 2, \cdots, r$ 代表 r 维子空间的角标 (为方便计, 在不会引起混淆的情况下, 这里和以后将省去角标上的撇号).

例 6.9 $su(2)$ 或 $so(3)$ 李代数的正则形式.

$su(2)$与 $so(3)$李代数的李积分别满足 (4.87) 与 (4.98) 式, 两者具有相同的形式

$$[X_i, X_j] = \mathrm{i} \sum_k \varepsilon_{ijk} X_k. \tag{6.148}$$

为了求出其正则形式, 令 $A = X_3$, 解方程

$$[A, X] = \rho X, \tag{6.149}$$

得根与本征矢

$$\begin{aligned}
&\rho = 0,\ H_1 = A = X_3,\\
&\rho = 1,\ E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + \mathrm{i}X_2),\\
&\rho = -1,\ E_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - \mathrm{i}X_2).
\end{aligned} \tag{6.150}$$

表明 $su(2)$ 或 $so(3)$ 李代数的秩 $r = 1$, 即两个非零根都是一维空间的矢量, 分别为 $\rho = 1$ 与 $\rho = -1$. (6.150) 式的三个本征矢量 $\{H_1, E_{\pm 1}\}$ 构成 $su(2)$ 或 $so(3)$ 李代数的正则形式, 它们都是原基矢 $X_i\,(i = 1, 2, 3)$ 的线性组合, 与一般形式的 (6.120)

式相一致. 相应的李积为

$$\begin{aligned}
&[H_1, E_1] = E_1, \\
&[H_1, E_{-1}] = -E_{-1}, \\
&[E_1, E_{-1}] = H_1.
\end{aligned} \tag{6.151}$$

与一般形式的 (6.147) 式相一致. 显然, (6.151) 式与原李代数的李积 (6.148) 式在形式上完全不一样.

例 6.10 $su\,(3)$ 李代数的正则形式.

$SU(3)$ 群的 8 个生成元由 (4.103) 式给出, 为

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.152}$$

满足李积 (4.104) 式, 即

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2\mathrm{i} \sum_k f_{ijk} \lambda_k, \tag{6.153}$$

结构常数 f_{ijk} 为完全反对称张量, 不为零的分量由 (4.105) 式或表 6.1 给出. 若取

$$\begin{aligned}
&H_1 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&H_2 = \frac{1}{2}\lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1 + \mathrm{i}\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_{-\alpha} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1 - \mathrm{i}\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_{\beta} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_4 + \mathrm{i}\lambda_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_{-\beta} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_4 - \mathrm{i}\lambda_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_{\beta-\alpha} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_6 + \mathrm{i}\lambda_7) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
E_{-(\beta-\alpha)} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_6 - \mathrm{i}\lambda_7) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{6.154}
$$

可以证明它们之间满足对易关系

$$
\begin{aligned}
&[H_1, H_2] = 0, \\
&[H_1, E_{\pm\alpha}] = \pm E_{\pm\alpha}, \quad [H_2, E_{\pm\alpha}] = 0, \\
&[H_1, E_{\pm\beta}] = \pm\frac{1}{2}E_{\pm\beta}, \quad [H_2, E_{\pm\beta}] = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}E_{\pm\beta}, \\
&\left[H_1, E_{\pm(\beta-\alpha)}\right] = \mp\frac{1}{2}E_{\pm(\beta-\alpha)}, \quad \left[H_2, E_{\pm(\beta-\alpha)}\right] = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}E_{\pm(\beta-\alpha)}, \\
&[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = H_1, \quad [E_{\beta}, E_{-\beta}] = \frac{1}{2}H_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}H_2, \\
&\left[E_{(\beta-\alpha)}, E_{-(\beta-\alpha)}\right] = -\frac{1}{2}H_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}H_2, \\
&[E_{-\alpha}, E_{\beta}] = \frac{1}{\sqrt{2}}E_{\beta-\alpha}, \quad \left[E_{-\alpha}, E_{-(\beta-\alpha)}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}E_{-\beta}, \\
&\left[E_{\beta}, E_{-(\beta-\alpha)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}E_{\alpha}, \quad [E_{\alpha}, E_{\beta}] = 0.
\end{aligned}
\tag{6.155}
$$

这些结果与李积的正则形式 (6.147) 式完全相同, 所以 (6.154) 式是 $su(3)$ 李代数的正则形式, 它们都是原基矢 $\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,8)$ 的线性组合, 与正则李代数的一般形式 (6.120) 式相一致. 由 (6.155) 式知, $su(3)$ 李代数的秩 $r=2$, 即各非零根都是二维空间的矢量, 其中

$$\alpha=(1,0)\,,\ \beta=\frac{1}{2}\left(1,\sqrt{3}\right),\ \beta-\alpha=\frac{1}{2}\left(-1,\sqrt{3}\right), \tag{6.156}$$

它们的长度都归一为 1, 再加上相应的负根, 共有六个非零根. 这六个非零根正是后面图 6.5 中的六个矢量, 为什么会有这样的结果呢? 后面将作讨论.

6.4 正则半单李代数根系的性质

6.4.1 正则半单李代数根系的结构

定理 6.2 给出了正则半单李代数根系的对称性: 若 α 是一个非零根向量, 则 $-\alpha$ 也是一个根向量. 这里将介绍另外几个定理, 阐述根系结构的其他一些重要特点.

定理 6.3 若 α 与 β 是根, 则

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=\text{整数}, \tag{6.157}$$

且

$$\beta-\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\alpha \tag{6.158}$$

也是一个根.

证明 设 α 与 β 是根, 而 $\alpha+\beta$ 不是根, 则由 (6.147) 式知

$$[E_{-\alpha},E_\beta]=N_{-\alpha\beta}E_{\beta-\alpha}=E'_{\beta-\alpha}, \tag{6.159}$$

即 $\beta-\alpha$ 也是根, 其中常数 $N_{-\alpha\beta}$ 已合并在 $E'_{\beta-\alpha}$ 中, 同理

$$\left[E_{-\alpha},E'_{\beta-\alpha}\right]=E'_{\beta-2\alpha},$$

即 $\beta-2\alpha$ 也是根, 以此类推

$$\left[E_{-\alpha},E'_{\beta-j\alpha}\right]=E'_{\beta-(j+1)\alpha}, \tag{6.160}$$

即 $\beta-(j+1)\,\alpha$ 也是根.

由于根的数目是有限的, 因此当上式中的 j 取到某一值, 如 $j=q$(正整数) 时, 将中止成

$$\left[E_{-\alpha}, E'_{\beta-q\alpha}\right] = E'_{\beta-(q+1)\alpha} = 0. \tag{6.161}$$

又由 (6.147) 式知

$$\left[E_{\alpha}, E'_{\beta-(j\,+\,1)\alpha}\right] = \mu_{j+1} E'_{\beta-j\alpha}, \tag{6.162}$$

其中 μ_{j+1} 为一常数, 下面来确定该常数.

由 (6.160)与 (6.162)两式知

$$\begin{aligned}
\mu_{j+1}{E'}_{\beta-j\alpha} &= \left[E_{\alpha}, \left[E_{-\alpha}, E'_{\beta-j\alpha}\right]\right] \\
&\overset{\text{雅可比恒等式}}{=\!=} -\left[E_{-\alpha}, \left[{E'}_{\beta-j\alpha}, E_{\alpha}\right]\right] - \left[{E'}_{\beta-j\alpha}, \left[E_{\alpha}, E_{-\alpha}\right]\right] \\
&\qquad\qquad\quad (6.162)\text{ 式} \qquad\qquad\qquad\qquad (6.147)\text{ 式} \\
&\qquad\qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow \\
&= \qquad \mu_j \left[E_{-\alpha}, E'_{\beta-(j-1)\alpha}\right] \quad - \quad \sum_i \alpha^i \left[{E'}_{\beta-j\alpha}, H_i\right] \\
&\qquad\qquad\quad (6.160)\text{ 式} \qquad\qquad\qquad\qquad (6.147)\text{ 式} \\
&\qquad\qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow \\
&= \qquad \mu_j E'_{\beta-j\alpha} \qquad + \quad \sum_i \alpha^i \left(\beta - j\alpha\right)_i {E'}_{\beta-j\alpha} \\
&= \left(\alpha\cdot\beta - j\alpha\cdot\alpha + \mu_j\right) E'_{\beta-j\alpha},
\end{aligned}$$

亦即

$$\mu_{j+1} = \alpha\cdot\beta - j\alpha\cdot\alpha + \mu_j \quad (j \geqslant 0)\,. \tag{6.163}$$

又由 (6.162) 式知

$$\left[E_{\alpha}, E'_{\beta}\right] = \mu_0 {E'}_{\beta+\alpha}. \tag{6.164}$$

由于按照假设, $\alpha+\beta$ 不是根, 所以 $\left[E_{\alpha}, E'_{\beta}\right]=0$, 故 $\mu_0=0$. 这样, 由 (6.163) 式可得递推公式

$$\mu_j = j\alpha\cdot\beta - \frac{j(j-1)}{2}\alpha\cdot\alpha \quad (j \geqslant 0)\,. \tag{6.165}$$

另由 (6.161)与 (6.162)两式知

$$\mu_{q+1} = 0, \tag{6.166}$$

所以, (6.165) 式给出

$$\alpha\cdot\beta = \frac{q}{2}\alpha\cdot\alpha,$$

或

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = q = \text{正整数}. \tag{6.167}$$

且

$$\beta-\alpha,\beta-2\alpha,\cdots,\beta-q\alpha=\beta-\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\alpha \tag{6.168}$$

也是根, 定理成立.

一般情况下, 设 α 与 β 是根, 则 $\beta-\alpha,\beta-2\alpha,\cdots,\beta-q_1\alpha$ 是根, 而 $\beta-(q_1+1)\,\alpha$ 不是根. 另外 $\beta+\alpha,\beta+2\alpha,\cdots,\beta+q_2\alpha$ 也是根, 而 $\beta+(q_2+1)\,\alpha$ 不是根. 令 $\gamma=\beta+q_2\alpha$, $q=q_1+q_2$, 则

$$\gamma=\beta+q_2\alpha,\gamma-\alpha,\gamma-2\alpha,\cdots,\gamma-q\alpha=\beta-q_1\alpha, \tag{6.169a}$$

或

$$\beta+q_2\alpha,\beta+(q_2-1)\,\alpha,\cdots,\beta-q_1\alpha \tag{6.169b}$$

是根, 而 $\gamma+\alpha=\beta+(q_2+1)\alpha$ 与 $\gamma-(q+1)\,\alpha=\beta-(q_1+1)\,\alpha$ 不是根. 另

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=\frac{2\alpha\cdot(\gamma-q_2\alpha)}{\alpha\cdot\alpha}=\frac{2\alpha\cdot\gamma-2q_2\alpha\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}\xlongequal{\text{(6.167)式与 (6.169a) 式}}q-2q_2,$$

亦即

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=q_1-q_2=\text{整数}. \tag{6.170}$$

再由根链 (6.169) 式知

$$\beta-\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\alpha=\beta-(q_1-q_2)\,\alpha \tag{6.171}$$

是根, 定理得证.

定理 6.3 说明, 若 α、β 是根向量, 则 β 相对于 α 的垂直平面反射后得到的矢量也是一个根, 如图 6.1 所示.

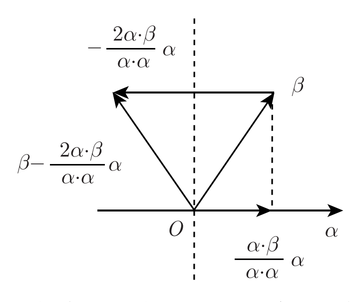


图 6.1　根向量 β 相对于 α 垂直平面的反射

定理 6.4　若 α 是根, 则在 α 的整数倍中, 只有 α、0、$-\alpha$ 是根.

证明　由 (6.159) 式知

$$[E_\alpha,E_\alpha]=E'_{2\alpha}=0,$$

所以 2α 不是根. 又由定理 6.3 知, 若取 $\beta=\alpha$, 则得根链：$\alpha, 0, -\alpha, \cdots, \alpha-q\alpha$, 其中

$$q=\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=2,$$

故得根链 $\alpha, 0, -\alpha$, 只有三个根, 定理得证.

定理 6.5 含 β 根的 α 根链

$$\cdots, \beta+2\alpha, \beta+\alpha, \beta, \beta-\alpha, \beta-2\alpha, \cdots,$$

最多有四个可能的根, 即

$$q=\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=0, \pm1, \pm2, \pm3. \tag{6.172}$$

证明 当 $\beta=\alpha$ 时, 由定理 6.4 知, 含 β 的 α 根链为 $\alpha, 0, -\alpha$, 定理成立.

当 $\beta\neq\alpha$ 时, 设含 β 的 α 根链有 5 个根, 为具体起见, 假设它们是

$$\beta+2\alpha, \beta+\alpha, \beta, \beta-\alpha, \beta-2\alpha.$$

再考察含 $\beta+2\alpha$ 的 β 根链, 由于 α 是根, 由定理 6.4 知

$$\beta+2\alpha-\beta=2\alpha$$

不是根. 又 $\beta+\alpha$ 是根, 所以

$$\beta+2\alpha+\beta=2(\alpha+\beta)$$

不是根. 这样, 含 $\beta+2\alpha$ 的 β 根链只有 $\beta+2\alpha$ 一个根, 即

$$(\beta+2\alpha)\cdot\beta=0.$$

同理含 $\beta-2\alpha$ 的 β 根链也只有 $\beta-2\alpha$ 一项, 故

$$(\beta-2\alpha)\cdot\beta=0.$$

两式相加得

$$\beta\cdot\beta=0,$$

说明 β 是零根, 与假设 β 为非零根相矛盾, 说明 β 根的 α 根链最多只能含有 4 个根. 即若 α、β 是根, $\beta+\alpha$ 不是根, 则含 β 根的 α 根链只能是 $\beta, \beta-\alpha, \beta-2\alpha, \beta-3\alpha$; 反之, 若 α、β 是根, $\beta-\alpha$ 不是根, 则含 β 根的 α 根链只能是 $\beta, \beta+\alpha, \beta+2\alpha, \beta+3\alpha$. 因此有

$$q=\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=0, \pm1, \pm2, \pm3.$$

定理得证.

6.4.2　根间的夹角

(6.157) 式表明, α 与 β 之间的夹角不能连续取值. 设二者间的夹角为 ϕ, 则

$$\cos\phi = \frac{\alpha\cdot\beta}{\sqrt{(\alpha\cdot\alpha)\,(\beta\cdot\beta)}},$$

或

$$\cos^2\phi = \frac{1}{4}\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}. \tag{6.173}$$

由定理 6.3 知

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = \text{整数}, \quad \frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = \text{整数},$$

而 $0 \leqslant \cos^2\phi \leqslant 1$, 所以

$$\cos^2\phi = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1. \tag{6.174}$$

由于根的对称性, 若 α 是根, 则 $-\alpha$ 也是根, 所以 ϕ 的取值可仅限于锐角的情况. 由上式知

$$\phi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \tag{6.175}$$

表明正根之间的夹角只有如上的五种情况, 其他夹角不存在.

6.4.3　根间的相对长度

由 (6.157) 式还知, 根间的相对长度与根间的夹角有关.

1. $\phi = 0^\circ$

$$\phi = 0^\circ\text{时}, \quad |\beta| = |\alpha|, \tag{6.176}$$

其中, $|\beta| = \sqrt{\beta\cdot\beta}$, $|\alpha| = \sqrt{\alpha\cdot\alpha}$, 为两矢量的长度或模.

证明　由 (6.157) 式知

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = \frac{2|\beta|}{|\alpha|} = \text{整数}, \quad \frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = \frac{2|\alpha|}{|\beta|} = \text{整数},$$

两式表明

$$|\beta| = |\alpha|, \quad |\beta| = 2|\alpha| \text{ 或 } |\alpha| = 2|\beta|.$$

由于 α 与 β 之间的夹角为零, 上式亦表明

$$\beta = \alpha, \quad \beta = 2\alpha \text{ 或 } \alpha = 2\beta.$$

由于 α 与 β 是根, 由定理 6.4 知：$\beta = 2\alpha$ 与 $\alpha = 2\beta$ 都不可能构成根, 只有 $\beta = \alpha$ 或 $|\beta| = |\alpha|$ 一种情况成立, (6.176) 式得证.

2. $\phi = 30°$

$$\phi = 30°\text{时}, \quad |\beta| = \sqrt{3}|\alpha| \text{ 或 } |\beta| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{3}}. \tag{6.177}$$

证明 由 (6.173) 式知

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 4\cos^2\phi = 4\cos^2 30° = 3.$$

这样

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = 3 \text{ 或 } 1, \quad \frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 1 \text{ 或 } 3,$$

得

$$\frac{\beta\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = 3 \text{ 或 } \frac{1}{3},$$

或

$$|\beta| = \sqrt{3}|\alpha| \text{ 或 } |\beta| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{3}}, \quad \Rightarrow (6.177)\text{式得证}.$$

3. $\phi = 45°$

$$\phi = 45°\text{时}, \quad |\beta| = \sqrt{2}|\alpha| \text{ 或 } |\beta| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}. \tag{6.178}$$

证明 由 (6.173) 式知

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 4\cos^2\phi = 4\cos^2 45° = 2.$$

则

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = 2 \text{ 或 } 1, \quad \frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 1 \text{ 或 } 2,$$

这样

$$\frac{\beta\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = 2 \text{ 或 } \frac{1}{2},$$

亦即

$$|\beta| = \sqrt{2}|\alpha| \text{ 或 } |\beta| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}, \quad \Rightarrow (6.178)\text{式得证}.$$

4. $\phi = 60°$

$$\phi = 60°\text{时}, \quad |\beta| = |\alpha|. \tag{6.179}$$

证明 由 (6.173) 式知

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 4\cos^2\phi = 4\cos^2 60° = 1.$$

则

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=1,\quad \frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}=1,$$

因此

$$\frac{\beta\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=1.$$

或

$$|\beta|=|\alpha|,\quad \Rightarrow (6.179)\text{式得证}.$$

5. $\phi=90^\circ$

$$\phi=90^\circ\text{时},\ \frac{|\beta|}{|\alpha|}\text{不确定}. \tag{6.180}$$

证明　由 (6.173) 式知

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}=4\cos^2\phi=4\cos^2 90^\circ=0.$$

则

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=0,\quad \frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}=0,$$

故

$$\frac{\beta\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}\text{不确定}.$$

亦即

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|}\text{不确定},\quad \Rightarrow (6.180)\text{式得证}.$$

6.5　秩 $r\leqslant 2$ 正则半单李代数根系的图形表示

本节将介绍一种图形方法, 将秩 $r\leqslant 2$ 正则半单李代数的根用图画出来. 一般情况下根系的图形表示将在 6.6 节中讨论.

6.5.1　秩 $r=1$ 时的根向量图

该情况下, 根向量空间是一维的, 一个零根, 一个非零根, 假设为 α, 由根的对称性, $-\alpha$ 亦为根. 这三个根可在一维直线上画出来, 如图 6.2 所示.

$$-\alpha \qquad O \qquad \alpha$$

图 6.2　$A_1[SU(2)$ 与 $SO(3)]$ 李代数的根图

所以 $r=1$ 仅存在一个李代数, 记为 A_1. 与此李代数相应的群为 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 群. 例如，在例 6.9 中, 根的长度取作 1, 即 $|\alpha|=1$.

6.5.2　秩 $r=2$ 时的根向量图

这时的根是二维向量, 可以在一个平面上将它们画出来.

1. $\phi = 30°$

设 $\alpha=(1,0)$ 是一个根, 另有一根为 β, 假设为长者, 与 α 间的夹角为 30°. 由 (6.177) 式知, $|\beta|=\sqrt{3}|\alpha|$. 由根的对称性知, $-\alpha$、$-\beta$ 亦是根. 再考察向量 $\alpha+\beta$, 由于

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) &= \alpha\cdot\alpha \quad + \quad \underset{\Downarrow}{\overset{|\beta|=\sqrt{3}|\alpha|}{\beta\cdot\beta}} \quad + \quad \underset{\Downarrow}{\overset{\alpha\text{与}\beta\text{间的夹角为}30^\circ}{2\alpha\cdot\beta}} \\ &= \alpha\cdot\alpha \quad + \quad 3\alpha\cdot\alpha \quad + \quad 3\alpha\cdot\alpha \\ &= 7\alpha\cdot\alpha,\end{aligned}$$

故

$$|\alpha+\beta| = \sqrt{7}|\alpha| = \sqrt{\frac{7}{3}}|\beta|, \tag{6.181}$$

$\alpha+\beta$ 与短根 α 模长之比不符合 (6.177) 式的比值要求, $\alpha+\beta$ 不是根. 因此, 含 β 根的 α 根链只能是

$$\beta, \beta-\alpha, \cdots, \beta-q\alpha, \tag{6.182a}$$

其中

$$q = \frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = 3, \tag{6.182b}$$

所以含 β 根的 α 根链是

$$\beta, \beta-\alpha, \beta-2\alpha, \beta-3\alpha. \tag{6.183}$$

另外

$$\frac{2(\beta-3\alpha)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 2-3 = -1,$$

所以含 $\beta-3\alpha$ 的 β 根链有根

$$\beta-3\alpha-\frac{2(\beta-3\alpha)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\beta = \beta-3\alpha+\beta = 2\beta-3\alpha.$$

由于

$$
\begin{aligned}
(2\beta-3\alpha)\cdot(2\beta-3\alpha) =& 4\beta\cdot\beta+9\alpha\cdot\alpha-12\alpha\cdot\beta \\
=& 12\alpha\cdot\alpha+9\alpha\cdot\alpha-18\alpha\cdot\alpha \\
=& 3\alpha\cdot\alpha,
\end{aligned}
$$

则 $|2\beta-3\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|$, 所以 $2\beta-3\alpha$ 也是根且是一长根.

可以证明, 含 (6.183) 式其他各根的 β 根链不构成新根. 如

$$
\frac{2\left(\beta-\alpha\right)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}=2-1=1,
$$

则

$$
\beta-\alpha-\frac{2\left(\beta-\alpha\right)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\beta=\beta-\alpha-\beta=-\alpha
$$

不是新根. 这样, 考虑到根的对称性, 共得 12 个非零根

$$
\pm\alpha,\pm\beta,\pm\left(\beta-\alpha\right),\pm\left(\beta-2\alpha\right),\pm\left(\beta-3\alpha\right),\pm\left(2\beta-3\alpha\right), \tag{6.184}
$$

另加两个零根, 共有 14 个根, 这个李代数称为 G_2 李代数, 相应的群是 G_2 群. 由于

$$
\begin{aligned}
(\beta-\alpha)\cdot(\beta-\alpha) &= \beta\cdot\beta+\alpha\cdot\alpha-2\alpha\cdot\beta \\
&= 3\alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\alpha-3\alpha\cdot\alpha \\
&= \alpha\cdot\alpha,
\end{aligned}
$$

故 $|\beta-\alpha|=|\alpha|$, $\beta-\alpha$ 是短根. 又

$$
\begin{aligned}
(\beta-2\alpha)\cdot(\beta-2\alpha) &= \beta\cdot\beta+4\alpha\cdot\alpha-4\alpha\cdot\beta \\
&= 3\alpha\cdot\alpha+4\alpha\cdot\alpha-6\alpha\cdot\alpha \\
&= \alpha\cdot\alpha,
\end{aligned}
$$

故 $|\beta-2\alpha|=|\alpha|$, $\beta-2\alpha$ 也是短根. 再

$$
\begin{aligned}
(\beta-3\alpha)\cdot(\beta-3\alpha) &= \beta\cdot\beta+9\alpha\cdot\alpha-6\alpha\cdot\beta \\
&= 3\alpha\cdot\alpha+9\alpha\cdot\alpha-9\alpha\cdot\alpha \\
&= 3\alpha\cdot\alpha,
\end{aligned}
$$

故 $|\beta-3\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|$, $\beta-3\alpha$ 是长根.

综合上面所得结果, 可画出 G_2 李代数的根图, 如图 6.3 所示.

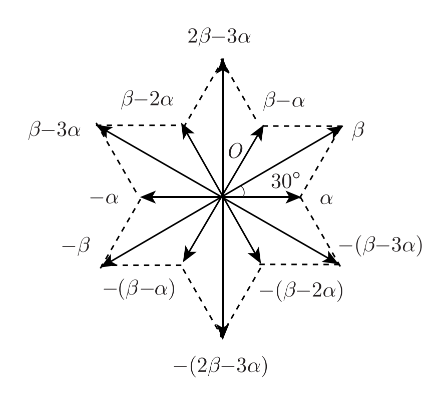


图 6.3 $G_2\,(G_2)$ 李代数的根图 [戴维特 (David) 星]

2. $\phi = 45°$

设 $\alpha = (1,0)$ 是一个根, 另有一根为 β, 假设为长者, 与 α 间的夹角为 $45°$, 由 (6.178) 式知, $|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$. 由根的对称性知, $-\alpha$、$-\beta$ 也是根. 再考察向量 $\alpha + \beta$, 由于

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) &= \alpha\cdot\alpha \quad + \underset{\substack{|\beta|=\sqrt{2}|\alpha| \\ \Downarrow}}{\beta\cdot\beta} + \underset{\substack{\alpha\text{与}\beta\text{间的夹角为}45° \\ \Downarrow}}{2\alpha\cdot\beta} \\
&= \alpha\cdot\alpha + 2\alpha\cdot\alpha + 2\alpha\cdot\alpha \\
&= 5\alpha\cdot\alpha\,,
\end{aligned}
$$

故

$$
|\alpha+\beta| = \sqrt{5}|\alpha| = \sqrt{\frac{5}{2}}|\beta|,
$$

不符合 (6.178) 式的比值要求, $\alpha + \beta$ 不是根. 这样, 含 β 根的 α 根链只能是

$$
\beta, \beta-\alpha, \cdots, \beta-q\alpha, \tag{6.185a}
$$

其中

$$
q = \frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = 2, \tag{6.185b}
$$

所以含 β 根的 α 根链是

$$
\beta, \beta-\alpha, \beta-2\alpha. \tag{6.186}
$$

可以证明, 含上式各项的 β 根链不构成新根. 如

$$
\frac{2\,(\beta-2\alpha)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 2-2 = 0,
$$

则

$$\beta-2\alpha-\frac{2\left(\beta-2\alpha\right)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\beta=\beta-2\alpha.$$

不构成新根. 再比如

$$\frac{2\left(\beta-\alpha\right)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}=2-1=1,$$

则

$$\beta-\alpha-\frac{2\left(\beta-\alpha\right)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\beta=\beta-\alpha-\beta=-\alpha,$$

不构成新根. 考虑到根的对称性, 由 (6.186) 式可得非零根

$$\pm\alpha,\pm\beta,\pm\left(\beta-\alpha\right),\pm\left(\beta-2\alpha\right), \tag{6.187}$$

再加上两个零根共有 10 个根, 这个李代数称为 B_2 李代数, 它是 $SO\left(5\right)$ 群的李代数.

由于

$$\begin{aligned}\left(\beta-\alpha\right)\cdot\left(\beta-\alpha\right)&=\beta\cdot\beta+\alpha\cdot\alpha-2\alpha\cdot\beta\\&=2\alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\alpha-2\alpha\cdot\alpha\\&=\alpha\cdot\alpha,\end{aligned}$$

故 $|\beta-\alpha|=|\alpha|$, $\beta-\alpha$ 是短根. 又

$$\begin{aligned}\left(\beta-2\alpha\right)\cdot\left(\beta-2\alpha\right)&=\beta\cdot\beta+4\alpha\cdot\alpha-4\alpha\cdot\beta\\&=2\alpha\cdot\alpha+4\alpha\cdot\alpha-4\alpha\cdot\alpha\\&=2\alpha\cdot\alpha,\end{aligned}$$

故 $|\beta-2\alpha|=\sqrt{2}|\alpha|$, $\beta-2\alpha$ 是长根. 由此可得 B_2 李代数的根图, 如图 6.4(a) 所示.

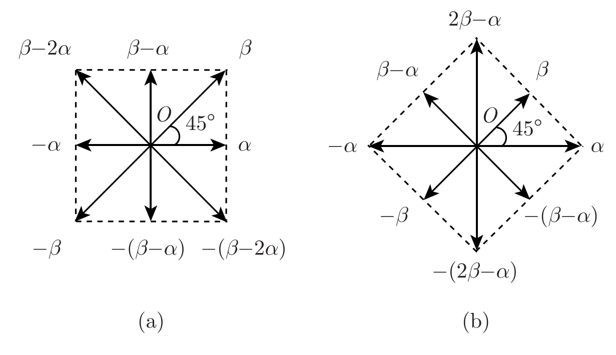


图 6.4　(a)$B_2[SO\left(5\right)]$ 李代数的根图;(b)$C_2[US_p\left(4\right)]$ 李代数的根图

若 $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$, 即 β 为短根, α 为长根, 其根图如图 6.4(b) 所示, 是由图 6.4(a) 旋转 $45°$ 角后得到的. 这个李代数称为 C_2 李代数, 是幺正辛群 (unitary symplectic group)$USp(4)$ 群的李代数. 由于 B_2 与 C_2 同构, 即 $B_2 \approx C_2$, 所以 $SO(5)$ 与 $USp(4)$ 局域同构或整体同态, 即 $SO(5) \sim USp(4)$.

3. $\phi = 60°$

设 $\alpha = (1, 0)$ 是一个根, 另一根为 β, 与 α 间的夹角为 $60°$, 由 (6.179) 式知, $|\beta| = |\alpha|$. 由根的对称性知, $-\alpha$, $-\beta$ 也是根. 再考察向量 $\alpha + \beta$, 由于

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) &= \alpha\cdot\alpha \quad + \quad \underset{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \Downarrow}}{\beta\cdot\beta} \quad + \quad \underset{\substack{\alpha\text{与}\beta\text{间的夹角为}60° \\ \Downarrow}}{2\alpha\cdot\beta} \\ &= \alpha\cdot\alpha \ + \ \alpha\cdot\alpha \ + \ \alpha\cdot\alpha \\ &= 3\alpha\cdot\alpha,\end{aligned}$$

表明

$$|\alpha + \beta| = \sqrt{3}|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|,$$

$\alpha + \beta$ 与根 α 或 β 模长之比不符合 (6.179) 式比值为 1 的要求, $\alpha + \beta$ 不是根. 这样, 含 β 根的 α 根链只能是

$$\beta, \beta - \alpha, \cdots, \beta - q\alpha, \tag{6.188a}$$

其中

$$q = \frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha} = 1, \tag{6.188b}$$

所以含 β 根的 α 根链是

$$\beta,\ \beta - \alpha. \tag{6.189}$$

可以证明, 含上式各项的 β 根链不构成新根. 如

$$\frac{2(\beta-\alpha)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta} = 2 - 1 = 1,$$

则

$$\beta - \alpha - \frac{2(\beta-\alpha)\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\beta = \beta - \alpha - \beta = -\alpha,$$

不构成新根. 考虑到根的对称性, 由 (6.189) 式可得非零根

$$\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\beta - \alpha), \tag{6.190}$$

再加上两个零根共有 8 个根, 它们构成 A_2 李代数, 是 $SU(3)$ 群的李代数. 其根图如图 6.5 所示, 图中根向量的关系与前面例 6.10 中 (6.156) 式的根向量相一致. 这是显然的, 两者讨论的都是 $SU(3)$ 群李代数的正则基矢, 结果肯定相同.

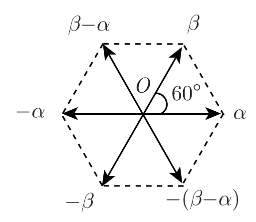


图 6.5　$A_2[SU(3)]$ 李代数的根图

4. $\phi = 90°$

由 (6.180) 式知, 这时的比值 $|\beta|/|\alpha|$ 不确定, 为具体起见, 规定该比值为 1, 即 $|\beta| = |\alpha|$, 由于此时

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) &= \alpha\cdot\alpha+\beta\cdot\beta+2\alpha\cdot\beta\\ &= 2\alpha\cdot\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) &= \alpha\cdot\alpha+\beta\cdot\beta-2\alpha\cdot\beta\\ &= 2\alpha\cdot\alpha,\end{aligned}$$

所以

$$|\alpha+\beta| = \sqrt{2}|\alpha|, \quad |\alpha-\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$$

不符合模长之比为 1 的要求, 故 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 都不构成根, 非零根只能是

$$\pm\alpha,\ \pm\beta, \tag{6.191}$$

加上两个零根共有 6 个根, 它们构成 D_2 李代数, 是 $SO(4)$ 群的李代数, 其根图如图 6.6 所示. 它是 A_1 李代数的直和, 即 $D_2 = A_1 \oplus A_1$. 可见 D_2 不是一个单纯李代数, 而是半单李代数.

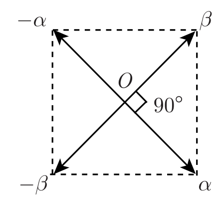


图 6.6　$D_2 = A_1 \oplus A_1[SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)]$ 半单李代数的根图

秩 $r=2$ 的所有可能半单李代数就这么多：A_2、B_2、C_2、D_2 与 G_2. 除 D_2 外, 其余都是单纯李代数. $r=1$ 的半单李代数只有一个 A_1, 它的直和 $A_1 \oplus A_1$ 构成了秩为 2 的半单李代数 D_2.

6.6 正则半单李代数根系的邓金图表示

由 6.5 节的讨论知, 对于秩 $r \leqslant 2$ 的正则半单李代数, 其根向量可在一维或二维图上直观地画出来; 对于秩 $r>2$ 的情况, 那里的作图方法就不再适用了. 本节将介绍正则半单李代数根系的另一种图示方法, 是由美籍俄裔数学家邓金 (E. B. Dynkin) 于 20 世纪 40 年代设计的, 相应的根系图称为邓金图. 该图示方法的好处有两个：一是对半单李代数的秩没有要求, 不但适用于 $r \leqslant 2$ 的情况, 也适用于 $r>2$ 的情况; 二是图形结构简单, 由后面的讨论可清楚地看到这一点.

6.6.1 正根

所谓正根 (positive root) 是指那些第一个不为零的坐标是正的根. 如图 6.4(a) 所示的 B_2 李代数, 正根有 4 个

$$\alpha=(1,0)\,,\beta=(1,1)\,,\beta-\alpha=(0,1)\,,-(\beta-2\alpha)=(1,-1)\,,$$

其余 4 个非零根：$-\alpha$、$-\beta$、$-(\beta-\alpha)$ 与 $\beta-2\alpha$, 第一个不为零的坐标都是负的, 所以不是正根.

在该例中, 正、负根数目相等. 在一般情况下, 由于半单李代数根系的对称性, 有 α 根, 则必有 $-\alpha$ 根, 所以正、负根的数目总是相等的.

6.6.2 单根

所谓单根 (simple root) 是指那些不能分解为两个正根之和的正根, 即单根是正根, 且彼此间线性无关. 仍以 B_2 李代数为例. 由于正根

$$\begin{aligned}\alpha&=(1,0)=(1,-1)+(0,1)=-(\beta-2\alpha)+(\beta-\alpha)\,,\\ \beta&=(1,1)=(1,0)+(0,1)=\alpha+\ (\beta-\alpha)\,,\end{aligned}$$

所以 $\alpha=(1,0)$ 与 $\beta=(1,1)$ 不是单根. 而正根 $-(\beta-2\alpha)=(1,-1)$ 与 $\beta-\alpha=(0,1)$ 都不可能再分解为两正根之和, 所以 $-(\beta-2\alpha)=(1,-1)$ 与 $\beta-\alpha=(0,1)$ 是两个单根. 在此例中, 单根的数目正好等于秩 $r=2$. 可以证明, 一个秩为 r 的半单李代数正好有 r 个单根. 这是很显然的, 因为根是 r 维空间的向量, 该空间中线性无关的向量最多有 r 个. 记

$$\varPi=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_r\}\,,\tag{6.192}$$

其中的 π_1、π_2、$\cdots$、π_r 都为单根, 通常称 $\varPi$ 为单根系或 π 系.

定理 6.6　在根向量集合 (记作 $\varSigma$) 中, 单根系 $\varPi=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_r\}$ 具有如下两方面性质:

(1) 若 $\alpha,\beta\in\varPi$ 且 $\alpha\neq\beta$, 则 $\alpha\cdot\beta\leqslant 0$, 这样

$$\frac{2\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=\text{负整数},\quad \frac{2\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}=\text{负整数}. \tag{6.193}$$

(2) 对于任意的 $\alpha\in\varSigma$, 都可用单根系展开为

$$\alpha=s\sum_{i}^{r}m_i\pi_i, \tag{6.194}$$

其中 $s=\pm1$, $m_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ 都是正整数或 0.

证明　(1) 若 α、$\beta\in\varPi$, 且 $\alpha\neq\beta$, 若 $\alpha\cdot\beta>0$, 则 $2\,(\alpha\cdot\beta)/(\alpha\cdot\alpha)$ 与 $2\,(\alpha\cdot\beta)/(\beta\cdot\beta)$ 都是正整数, 由定理 6.3 知, $\beta-\alpha\in\varSigma$, $\alpha-\beta\in\varSigma$. 这样, 二根中肯定有一个是正根. 若 $\beta-\alpha=\gamma$ 是正根, 则 $\beta=\alpha+\gamma$ 是两个正根之和, 与 β 是单根的假设相矛盾, 因此 $\beta-\alpha$ 不能是正根; 同理 $\alpha-\beta$ 也不可能是正根. 因此, 若 $\alpha,\beta\in\varPi$ 且 $\alpha\neq\beta$, 则 $\alpha\cdot\beta\leqslant0$.

(2) 展开式 (6.194) 是显然的. 因为 r 个线性独立的单根 $\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_r\}$ 构成 r 维空间的基矢, 该空间的任一矢量都可展成这些基矢的线性组合. 实际上, 对于任一单根 $\alpha\in\varPi$, 分解式 (6.194) 成立. 例如, 若 $\alpha=\pi_j$, j 取 $(1,2,\cdots,r)$ 中的任一整数, 则 (6.194) 式中的 $s=+1$, $m_i=\delta_{ij}$. 对于任一正根 $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 β、$\gamma\in\varSigma$ 为正根. 若 β 与 γ 都是单根, (6.194) 式成立; 若 β 与 γ 不是单根, 可将二者继续分解下去直到最后分解成单根之和, 所以 (6.194) 式总是成立的. 对于负根, 上述分析仍然成立, 只是将 s 取成 -1, 定理得证.

6.6.3　单根间的夹角与相对长度

单根间的夹角与相对长度间的关系由如下定理描述:

定理 6.7　若 α、$\beta\in\varPi$, 则 α 与 β 间的夹角 ϕ 只能是 $90°,120°,135°$ 与 $150°$ 四种, 且若取 $\alpha\cdot\alpha\leqslant\beta\cdot\beta$, 则

$$\frac{\beta\cdot\beta}{\alpha\cdot\alpha}=\begin{cases}\text{不确定} & (\phi=90°),\\ \quad 1 & (\phi=120°),\\ \quad 2 & (\phi=135°),\\ \quad 3 & (\phi=150°).\end{cases} \tag{6.195}$$

证明　由定理 6.6 知, 若 α、$\beta \in \Pi$ 且 $\alpha \neq \beta$, 则 $\alpha \cdot \beta \leqslant 0$, 因此 α 与 β 间的夹角 ϕ 是 $90°$ 或处在第二象限. 又由定理 6.6 知

$$\frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} = -p, \quad \frac{2\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} = -q, \tag{6.196}$$

都是负整数, 若假设 $\alpha \cdot \alpha \leqslant \beta \cdot \beta$, 则

$$\frac{\beta \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{p}{q} \geqslant 1, \tag{6.197}$$

而

$$\frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha}\frac{2\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} = 4\cos^2\phi = pq = \text{正整数}, \tag{6.198}$$

故

$$\cos^2\phi = \frac{1}{4}pq = \frac{1}{4}\text{正整数} < 1, \tag{6.199}$$

注意：$\cos^2\phi \neq 1$. 因为 ϕ 处于第二象限, 若 $\cos^2\phi = 1$, 则 $\phi = 180°$, $\beta = -a\alpha$, 其中 a 是正常数. 由于 α 为正根, 则 β 就成了负根, 因此 $\beta \notin \Pi$ 与假设相矛盾. 这样, 由 (6.199) 式知

$$\begin{aligned}
&\text{当}\phi = 90°\text{时}, \cos^2\phi = 0, p = 0, q = 0, \frac{\beta \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{p}{q}\text{不确定},\\
&\text{当}\phi = 120°\text{时}, \cos^2\phi = \frac{1}{4}, p = 1, q = 1, \frac{\beta \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{p}{q} = 1,\\
&\text{当}\phi = 135°\text{时}, \cos^2\phi = \frac{1}{2}, p = 2, q = 1, \frac{\beta \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{p}{q} = 2,\\
&\text{当}\phi = 150°\text{时}, \cos^2\phi = \frac{3}{4}, p = 3, q = 1, \frac{\beta \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{p}{q} = 3,
\end{aligned} \tag{6.200}$$

定理得证.

6.6.4　邓金图

由定理 6.6 知, 正则半单李代数的根系取决于单根系, 只要知道了单根系, 整个根系也就知道了. 单根系可用图形表示出来, 这就是前面所说的邓金图, 其构图规则如下：

(1) 用圆圈○表示单根系 Π 中的长根, 圆点●表示 Π 中的短根;

(2) 当两根间的夹角 $\phi = 90°$ 时, 两根间无连线; 夹角 $\phi = 120°$, 有一条连线; 夹角 $\phi = 135°$, 有两条连线; 夹角 $\phi = 150°$, 有三条连线, 或由 (6.200) 式

$$4\cos^2\phi = t, \tag{6.201}$$

其中 t 为两根间连线的条数.

例 6.11　单纯李代数 $A_1\left[SU(2)\text{与}SO(3)\right]$ 的邓金图.

A_1 的根图如图 6.2 所示, 它只有一个 1 维单根, 设其长度为 1, 则

$$\pi_1=\alpha=(1)\,, \tag{6.202}$$

其邓金图只是一个圈, 如图 6.7 所示.

A_1

π_1

图 6.7　$A_1\left[SU(2)\text{与}SO(3)\right]$ 单纯李代数的邓金图

例 6.12　单纯李代数 $A_2\left[SU(3)\right]$ 的邓金图.

A_2 有两个 2 维单根, 由图 6.5 知

$$\pi_1=\beta=\frac{1}{2}\left(1,\sqrt{3}\right),\ \pi_2=-\left(\beta-\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(1,-\sqrt{3}\right), \tag{6.203}$$

两者间夹角 120°, 长度都等于 1. 按规则, 邓金图如图 6.8 所示. 与图 6.5 相比, 邓金图 6.8 要简单得多.

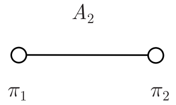


图 6.8　$A_2\left[SU(3)\right]$ 单纯李代数的邓金图

例 6.13　单纯李代数 $B_2\left[SO(5)\right]$ 的邓金图.

B_2 有两个 2 维单根, 由图 6.4(a) 知

$$\pi_1=-\left(\beta-2\alpha\right)=(1,-1)\,,\ \pi_2=\beta-\alpha=(0,1)\,, \tag{6.204}$$

两者间夹角 135°, $(\pi_1\cdot\pi_1)/(\pi_2\cdot\pi_2)=2$, π_1 为长根, π_2 为短根. 按规则, 邓金图如图 6.9 所示. 显然, 该图较根图 6.4(a) 要简单得多.

B_2

π_1　　π_2

图 6.9　$B_2\left[SO(5)\right]$ 单纯李代数的邓金图

例 6.14　半单李代数 $D_2[SO(4)]$ 的邓金图.

如图 6.6 所示, D_2 的两个 2 维单根为

$$\pi_1=\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\,,\ \pi_2=\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,, \tag{6.205}$$

两者间夹角 90°, 长度设为相等, 都是 1. 邓金图如图 6.10 所示.

D_2

○ ○

π_1 π_2

图 6.10　$D_2\,[SO\,(4)]$ 半单李代数的邓金图

6.6.5　邓金图的性质

(1) 含有三重线的邓金图只有一个, 如图 6.11 所示, 相应的李代数为 G_2, 其根向量图如图 6.3 所示. 长根 $\pi_1 = 2\beta - 3\alpha = \left(0, \sqrt{3}\right)$, 短根 $\pi_2 = -(\beta - 2\alpha) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$, 两者间夹角 150°, $(\pi_1 \cdot \pi_1)/(\pi_2 \cdot \pi_2) = 3$.

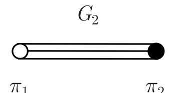


图 6.11　$G_2(G_2)$ 单纯李代数的邓金图

证明　设有 π_3 根存在并与 π_1 相连, 则由初等几何知, 三个线性无关的矢量 (非共面) 夹角之和

$$\phi_{\pi_1\pi_2} + \phi_{\pi_2\pi_3} + \phi_{\pi_1\pi_3} < 360°. \tag{6.206}$$

由于 $\phi_{\pi_1\pi_2} = 150°$, $\phi_{\pi_1\pi_3} \geqslant 120°$(相连时至少有一条连线), 则 $\phi_{\pi_2\pi_3} \geqslant 90°$ 是不可能的, 所以不存在 π_3, 证毕.

(2) 在邓金图中, 若不考虑根的长短, 只考虑单根间的夹角, 这样的邓金图称为角图. 角图必须是树形的, 不能包含闭合回路.

证明　设有 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k \in \mathit{\Pi}$, 它们在角图中首尾相连、构成回路, 这样

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \neq 0, \pi_2 \cdot \pi_3 \neq 0, \cdots, \pi_k \cdot \pi_1 \neq 0.$$

记 $\pi_{k+1} = \pi_1$, 则

$$\begin{aligned} 0 < \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\pi_i}{|\pi_i|}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\pi_i}{|\pi_i|}\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\pi_i \cdot \pi_i}{|\pi_i|^2} + 2\sum_{i=1}^{k} \frac{\pi_i \cdot \pi_{i+1}}{|\pi_i|\,|\pi_{i+1}|} \\ &= k + 2\sum_{i=1}^{k} \cos\phi_{\pi_i\pi_{i+1}}. \end{aligned}$$

由性质 (1) 知道, 回路中不能出现三线, 亦不存在不相连, 即夹角 $\phi = 90°$ 的情况, 所以两根间只能用单线或双线相连, 亦即

$$\cos\phi_{\pi_i\pi_{i+1}} = -\frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{6.207}$$

这样, 若假设 k 个根中, 单线相连的有 k_1 个, 双线相连的有 k_2 个, 则 $k = k_1 + k_2$, 这样

$$0 < k + 2\sum_{i}^{k} \cos\phi_{\pi_i\pi_{i+1}} = k - k_1 - \sqrt{2}k_2 = \left(1 - \sqrt{2}\right) k_2 < 0, \tag{6.208}$$

矛盾, 所以角图不能构成回路, 证毕.

(3) 在角图中, 任意一根都不能有四条及以上的连线.

证明 设 $\alpha \in \varPi$ 且与 α 相连的单根为 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_j \in \varPi$, 因为不能构成回路, 所以 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_j$ 两两垂直, 否则将有连线而构成闭合回路. 注意到 α 与 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_j \in \varPi$ 为非共面矢量, 得关系

$$\sum_{i=1}^{j} \cos^2\phi_{\pi_{i_\alpha}} < 1, \quad \Rightarrow 4\sum_{i=1}^{j} \cos^2\phi_{\pi_{i_\alpha}} < 4. \tag{6.209}$$

设 α 与 π_i 间有 t_i 条线相连, 则由 (6.201) 式知, $4\cos^2\phi_{\pi_{i_\alpha}} = t_i$, 上式变为

$$\sum_{i=1}^{j} t_i < 4, \tag{6.210}$$

证毕.

(4) 设 C 是角图中一条简单的链, 如图 6.12 所示.

图 6.12 简单链 C

即 $C = \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_j \in \varPi$ 中各相邻两根间都以单线相连. 记

$$\pi = \sum_{i=1}^{j} \pi_i, \tag{6.211}$$

即 C 链只用一个根向量 π 代替, 则 $\varPi$ 中所有除 C 外的其他根向量 $\beta \in \varPi/C$ 与 C 链的连接等价于与 π 的连接.

证明 设 $\beta \in \varPi/C$, 且 β 与 $\pi_i\,(1 \leqslant i \leqslant j)$ 以 t 条线相连, 则 β 不再能与 C 中的其他根相连, 否则将形成回路. 因此

$$\beta \cdot \pi = \beta \cdot \left(\sum_{k=1}^{j} \pi_k\right) = \beta \cdot \pi_i, \tag{6.212}$$

所以 β 与 π 也以 t 重线相连. 相反, 若 $\beta \in \Pi/C$ 不与 C 中的任一根向量相连, 则

$$\beta \cdot \pi = \beta \cdot \left(\sum_{k=1}^{j} \pi_k \right) = 0, \tag{6.213}$$

即 β 与 π 也不相连. 因此 Π 中除 C 外的任意其他根向量与 C 链的连接等价于与 π 的连接, 证毕.

由 (3) 与 (4) 两性质知, 图 6.13 所示的各角图是不存在的, 可能的角图只有如图 6.14 所示的 4 种.

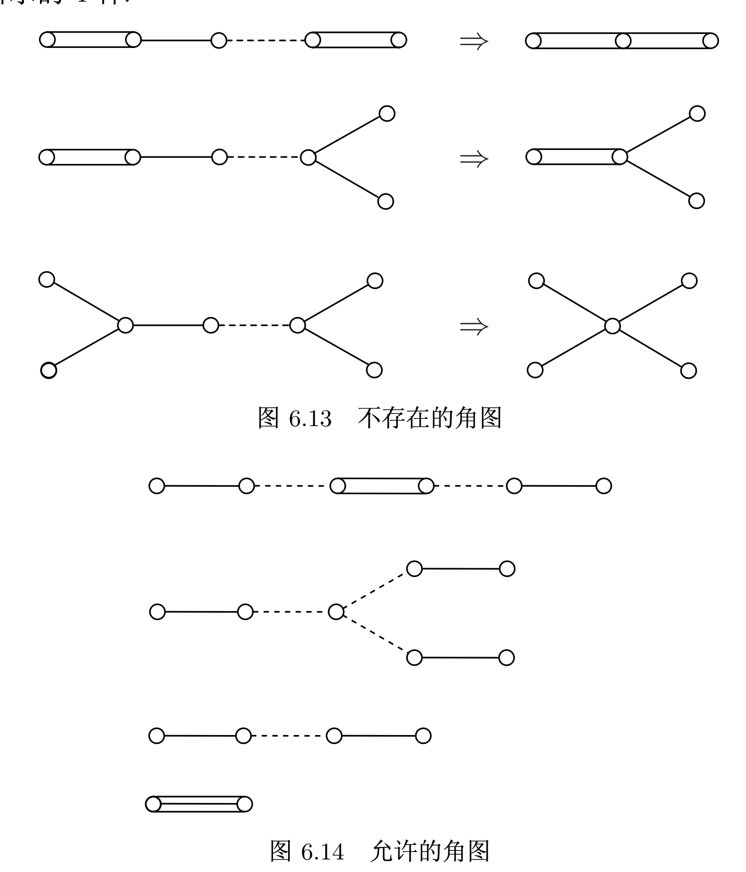


图 6.13 不存在的角图

图 6.14 允许的角图

6.6.6 正则单纯李代数的邓金图

正则单纯李代数单根系 Π 的邓金图共有如图 6.15 所示的 9 种形式, 括号内是相应的群, 图中数字之比为相应两根长度平方之比.

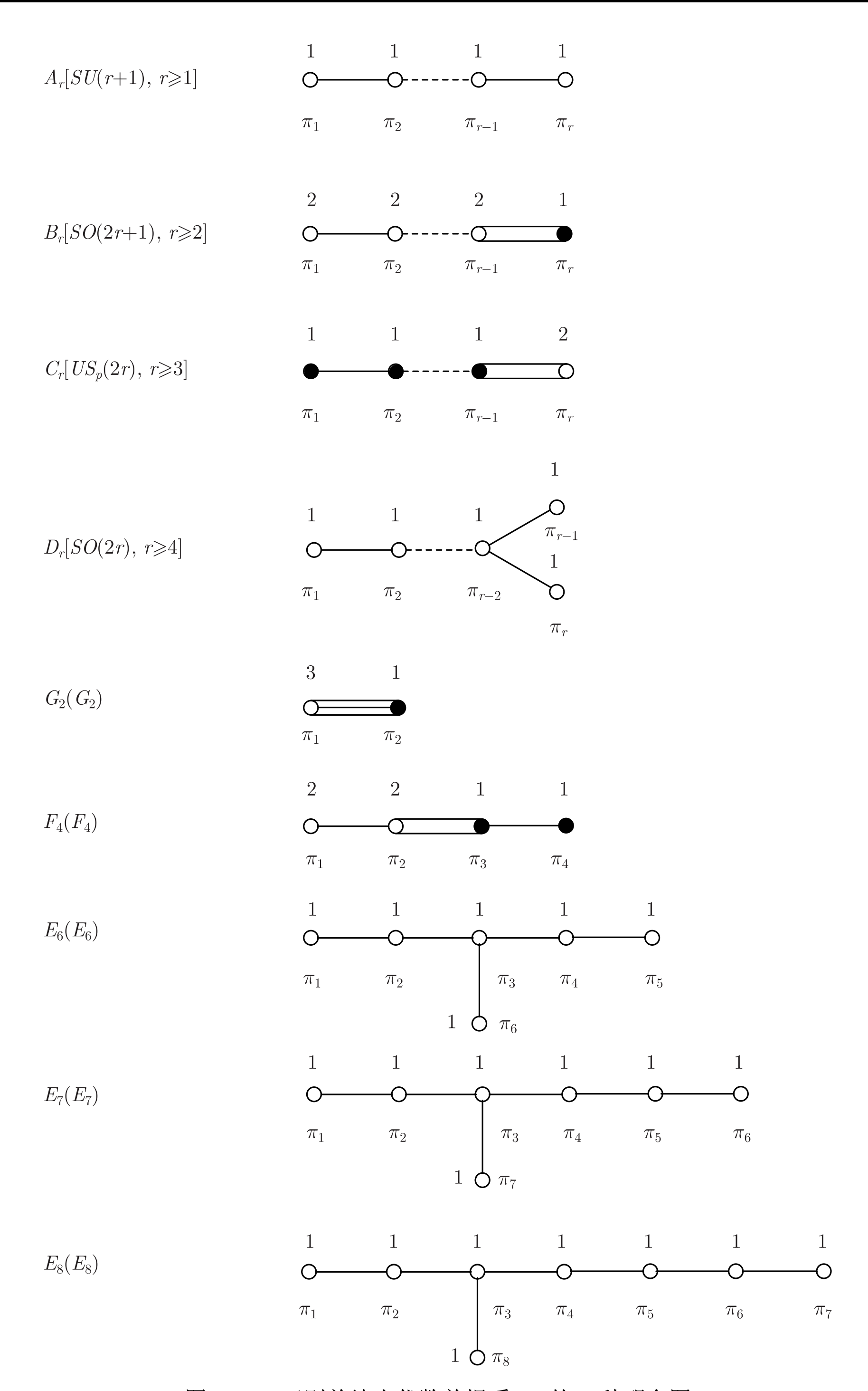


图 6.15　正则单纯李代数单根系 Π 的 9 种邓金图

证明　$G_2\,(G_2)$ 的邓金图已介绍过, 现在证明其他各图.

设 $C=\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_j\in\Pi$ 是由同样长度的根向量组成的简单链, 即相邻两根向量间只有一条连线, 令

$$c^2=\pi_i\cdot\pi_i,\quad \pi=\sum_{i=1}^{j}i\pi_i, \tag{6.214}$$

则

$$\begin{aligned}\pi\cdot\pi=&\left(\sum_{i=1}^{j}i\pi_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{j}i\pi_i\right)\\ =&\sum_{i=1}^{j}i^2\pi_i\cdot\pi_i+2\sum_{i=1}^{j-1}i\,(i+1)\,\pi_i\cdot\pi_{i+1}\\ =&\sum_{i=1}^{j}i^2c^2+2\sum_{i=1}^{j-1}i\,(i+1)\left(-\frac{1}{2}c^2\right)\\ =&\sum_{i=1}^{j}i^2c^2-\sum_{i=1}^{j-1}i\,(i+1)\,c^2\\ =&j^2c^2-\sum_{i=1}^{j-1}ic^2,\end{aligned}$$

亦即

$$\pi\cdot\pi=\frac{1}{2}j\,(j+1)\,c^2. \tag{6.215}$$

1. 考虑邓金图 6.16, 这里假设

$$\pi_i\cdot\pi_i=1,\quad \tau_i\cdot\tau_i=2, \tag{6.216}$$

图 6.16　单根系 Π 的邓金图的一般形式之一

令

$$\pi=\sum_{i=1}^{p}i\pi_i,\quad \tau=\sum_{i=1}^{q}i\tau_i, \tag{6.217}$$

则由 (6.215) 与 (6.216) 两式知

$$\pi\cdot\pi=\frac{1}{2}p\,(p+1)\,,\quad \tau\cdot\tau=q\,(q+1)\,. \tag{6.218}$$

再

$$\pi \cdot \tau \xlongequal{\text{只有}\pi_p\text{与}\tau_q\text{相连}} pq\pi_p \cdot \tau_q = pq\pi_p\tau_q \cos 135^\circ \xlongequal{(6.216)\text{式}} -pq. \tag{6.219}$$

又

$$\frac{(\pi \cdot \tau)^2}{(\pi \cdot \pi)(\tau \cdot \tau)} = \cos^2 \phi_{\pi\tau} < 1, \quad \Rightarrow (\pi \cdot \tau)^2 < (\pi \cdot \pi)(\tau \cdot \tau), \tag{6.220}$$

则由 (6.218)~(6.220) 三式得

$$p^2q^2 < \frac{1}{2}pq(p+1)(q+1),$$

注意到 p 与 q 均为正整数, 上式变为

$$(p-1)(q-1) < 2. \tag{6.221}$$

要满足该不等式, 有如下四种解:

(1) $p=0$, q 任意, 或 $q=0$, p 任意, $\Rightarrow$ 邓金图 $A_r\,[SU(r+1), r \geqslant 1]$;

(2) $p=1$, q 任意, $\Rightarrow$ 邓金图 $B_r\,[SO(2r+1), r \geqslant 2]$;

(3) $q=1$, p 任意, $\Rightarrow$ 邓金图 $C_r\,[US_p(2r), r \geqslant 3]$;

(4) $p=2$, $q=2$, $\Rightarrow$ 邓金图 $F_4\,(F_4)$.

2. 再考虑邓金图 6.17, 这里假设

$$\pi_i \cdot \pi_i = \tau_i \cdot \tau_i = \sigma_i \cdot \sigma_i = \delta \cdot \delta = 1. \tag{6.222}$$

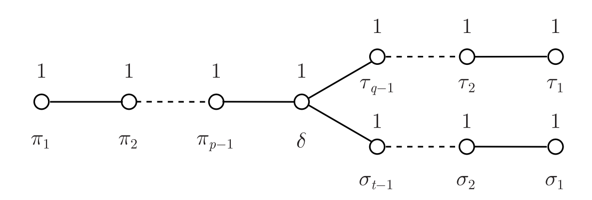


图 6.17　单根系 $\varPi$ 的邓金图的一般形式之二

令

$$\pi = \sum_{i=1}^{p-1} i\pi_i, \quad \tau = \sum_{i=1}^{q-1} i\tau_i, \quad \sigma = \sum_{i=1}^{t-1} i\sigma_i, \tag{6.223}$$

不失一般性, 假设 $p \geqslant q \geqslant t$. 由 (6.215) 与 (6.222) 式得

$$\pi \cdot \pi = \frac{1}{2}p(p-1), \quad \tau \cdot \tau = \frac{1}{2}q(q-1), \quad \sigma \cdot \sigma = \frac{1}{2}t(t-1). \tag{6.224}$$

再注意到根向量 δ 与其相邻的三个根向量的夹角各为 $120°$, 与其余不相邻的根向量垂直, 得

$$\pi \cdot \delta = -\frac{1}{2}(p-1), \quad \tau \cdot \delta = -\frac{1}{2}(q-1), \quad \sigma \cdot \delta = -\frac{1}{2}(t-1). \tag{6.225}$$

因此

$$\cos^2 \phi_{\pi\delta} = \frac{(\pi \cdot \delta)^2}{(\pi \cdot \pi)(\delta \cdot \delta)} = \frac{\left[-\frac{1}{2}(p-1)\right]^2}{\frac{1}{2}p(p-1)} = \frac{1}{2}\frac{p-1}{p} = \frac{1}{2}\left(1-p^{-1}\right),$$

同理

$$\cos^2 \phi_{\tau\delta} = \frac{1}{2}\left(1-q^{-1}\right), \quad \cos^2 \phi_{\sigma\delta} = \frac{1}{2}\left(1-t^{-1}\right),$$

由于 π, τ 与 σ 三者之间无连线, 故它们之间两两正交且不共面, 有关系

$$\cos^2 \phi_{\pi\delta} + \cos^2 \phi_{\tau\delta} + \cos^2 \phi_{\sigma\delta} < 1,$$

亦即

$$\frac{1}{2}\left(1-p^{-1}+1-q^{-1}+1-t^{-1}\right) < 1,$$

或

$$p^{-1}+q^{-1}+t^{-1} > 1. \tag{6.226}$$

由于已假设 $p \geqslant q \geqslant t$, 所以

$$p^{-1} \leqslant q^{-1} \leqslant t^{-1}. \tag{6.227}$$

这样, 由 (6.226)与 (6.227)两式得

$$3t^{-1} > 1, \quad \Rightarrow t < 3. \tag{6.228}$$

按图 6.17 假设: $t \geqslant 2$, 故 $t = 2$. 这样, 不等式 (6.226) 变为

$$p^{-1}+q^{-1} > \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow 2q^{-1} > \frac{1}{2}, \qquad \Rightarrow q < 4. \tag{6.229}$$

按图 6.17 假设: $q \geqslant 2$, 故 q 有两种取值

$$q = 2, 3. \tag{6.230}$$

(1) 当 $q=2$ 时, 由 (6.229) 式知

$$p^{-1}>0. \tag{6.231}$$

按假设 $p\geqslant q\,(=2)$, 得 $t=2,q=2,p\geqslant 2$, 得邓金图 $D_r\left[SO\left(2r\right),r\geqslant 4\right]$.

(2) 当 $q=3$ 时, 由 (6.229) 式得

$$p^{-1}>\frac{1}{6},\quad \Rightarrow p<6. \tag{6.232}$$

按假设 $p\geqslant q\,(=3)$, 得 p 的取值范围: $3\leqslant p\leqslant 5$, 因此有结果: $t=2,q=3,3\leqslant p\leqslant 5$, 对应于邓金图 $E_6\left(E_6\right)$、$E_7\left(E_7\right)$ 与 $E_8\left(E_8\right)$. 综合上述, 邓金图 6.15 得证.

6.7　正则半单李代数的表示

6.7.1　正则半单李代数表示的权

由 (6.53) 式知, 李代数的表示 M 是结构常数为 C_{ij}^k 的矩阵李代数. 因此, 若 M 是半单的, 则它可化为正则形式 (6.147). 这样, 若假设李代数或李群表示空间的维数为 l, 则对于秩为 r 的半单李代数, 将有 r 个相互对易的 $l\times l$ 矩阵 $M\left(H_i\right)(i=1,2,\cdots,r)$, 另有一组 $m-r$ 个不对易的矩阵 $M\left(E_\alpha\right)(\alpha\in\varSigma)$. 由于 $M\left(H_i\right)$ 相互对易, 它们有共同的本征矢 $\left|u_\varLambda\right\rangle$

$$M\left(H_i\right)\left|u_\varLambda\right\rangle=\varLambda_i\left|u_\varLambda\right\rangle, \tag{6.233a}$$

或

$$M\left(H\right)\left|u_\varLambda\right\rangle=\varLambda\left|u_\varLambda\right\rangle, \tag{6.233b}$$

其中 $M\left(H\right)=\left(M\left(H_1\right),M\left(H_2\right),\cdots,M\left(H_r\right)\right)$, $\left|u_\varLambda\right\rangle$ 是 l 维空间中的一个列矩阵.

本征值 $\varLambda_1,\varLambda_2,\cdots,\varLambda_r$ 构成了 r 维空间 $\varDelta_\varLambda$ 的一个向量 $\varLambda\left(\varLambda_1,\varLambda_2,\cdots,\varLambda_r\right)$, 称为表示 M 的权向量, 或简称为权. 而 r 维空间 $\varDelta_\varLambda$ 称为权空间, 权向量在权空间中的绘图称为权图.

本征值方程 (6.233) 最多有 l 个解, 所以表示 M 最多有 l 个权 $\varLambda$ 与本征矢 $\left|u_\varLambda\right\rangle$. 由于 $\varLambda$ 是 r 维空间中的向量, 线性无关的权向量最多有 r 个. 若一个权只对应于一个本征矢, 即 (6.233) 式的解是非简并的, 则称该权为单权 (simple weight).

李代数的表示空间与权空间是不同的, 权空间的维数取决于李代数的秩, 而表示空间的维数取决于所用的表示. 对于不同的表示, 其表示矩阵 $M(H_i)$ 不同, 因此给出的权也不同, 这样就可以用权向量来描述李代数的表示.

权向量与根向量虽然都是 r 维空间中的向量, 但是它们却是完全不同的两个向量. 根取决于李代数的结构常数与表示无关, 而权依赖于表示. 根是通过求解久

期方程 (6.123) 得到的, 根的数目等于李群的阶, 或等于生成元或无穷小算符的数目. 而权是通过求解生成元 H_i 的表示矩阵 $M(H_i)$ 的本征值方程 (6.233) 得到的, 权的数目等于表示空间的维数.

6.7.2 权的性质

权的基本性质由如下两条定理描述:

定理 6.8 设表示 $M(H)$ 的一个权为 Λ, $|u_\Lambda\rangle$ 是相应的本征矢. 若 $\alpha\in\Sigma$, 且 $M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle\neq 0$, 则 $\Lambda+\alpha$ 是权, 其本征矢为 $M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle$.

证明 由于

$$\begin{aligned}M(H_i)M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle &= [M(H_i)M(E_\alpha)-M(E_\alpha)M(H_i)]|u_\Lambda\rangle\\&\quad +M(E_\alpha)M(H_i)|u_\Lambda\rangle\\&= M([H_i,E_\alpha])|u_\Lambda\rangle+\Lambda_i M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle\\&\overset{(6.147)\text{式}}{=\!=\!=}\ M(\alpha_i E_\alpha)|u_\Lambda\rangle+\Lambda_i M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle\\&=(\Lambda_i+\alpha_i)M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle\ ,\end{aligned}$$

或

$$M(H)M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle=(\Lambda+\alpha)M(E_\alpha)|u_\Lambda\rangle\ . \tag{6.234}$$

定理得证.

定理 6.9 设 M 是半单李代数的一个不可约表示, $\alpha\in\Sigma$ 为任一非零根.

(1) 若 Λ 是 M 的一个权, 则

$$\frac{2\Lambda\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}=\text{整数},\quad \Lambda-\frac{2\Lambda\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}\alpha\text{也是}M\text{的权, 称为}\Lambda\text{的等价权.} \tag{6.235}$$

(2) 若 Λ 为单权, 则存在一个含 Λ 的 α 权链

$$\Lambda+p\alpha,\Lambda+(p-1)\alpha,\cdots,\Lambda,\Lambda-\alpha,\cdots,\Lambda-q\alpha, \tag{6.236}$$

使得 $\Lambda+(p+1)\alpha$ 与 $\Lambda-(q+1)\alpha$ 不是权, 且

$$\frac{2\Lambda\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}=q-p=\text{整数}. \tag{6.237}$$

(3) 等价权具有相同的简并度.

证明 限于本书的范围, 这里只给出 (1)、(2) 的证明, 关于 (3) 的证明, 有兴趣的读者可参阅其他书籍.

(1) 与 (2) 的证明方法与定理 6.3 的相类似. 假设 Λ 是权, $\Lambda+\alpha$ 不是权, 则由定理 6.8 知, $\Lambda-\alpha, \Lambda-2\alpha, \cdots$ 都是权. 由于李代数的表示是有限维的, 所以权的数目是有限的. 因此应存在一个正整数 q, 使得 $\Lambda-q\alpha$ 是权, 而 $\Lambda-(q+1)\alpha$ 不是权. 因此有权链

$$\Lambda, \Lambda-\alpha, \cdots, \Lambda-q\alpha \quad (q=\text{正整数}). \tag{6.238}$$

设该权链的本征矢为

$$|u_\Lambda\rangle, |u_{\Lambda-\alpha}\rangle, \cdots, |u_{\Lambda-q\alpha}\rangle,$$

则由定理 6.8 知

$$\begin{aligned}
&M(E_{-\alpha})|u_\Lambda\rangle = C|u_{\Lambda-\alpha}\rangle = |u_{\Lambda-\alpha}\rangle', \\
&M(E_{-\alpha})|u_{\Lambda-\alpha}\rangle' = |u_{\Lambda-2\alpha}\rangle', \\
&\qquad\vdots \\
&M(E_{-\alpha})|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle' = |u_{\Lambda-(j+1)\alpha}\rangle'.
\end{aligned} \tag{6.239}$$

这里已将常数 C 等合并在本征矢中, 由于 $\Lambda-(q+1)\alpha$ 不是权, 所以有

$$M(E_{-\alpha})|u_{\Lambda-q\alpha}\rangle' = 0.$$

另

$$M(E_\alpha)|u_{\Lambda-(j+1)\alpha}\rangle' = \mu_{j+1}|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle', \tag{6.240}$$

其中 μ_{j+1} 为常数, 由上式得

$$\begin{aligned}
\mu_{j+1}|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle' &= M(E_\alpha)M(E_{-\alpha})|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle' \\
&= M([E_\alpha, E_{-\alpha}])|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle' + M(E_{-\alpha})M(E_\alpha)|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle' \\
&\qquad\qquad \overset{(6.147)\text{式}}{\Downarrow} \qquad\qquad\qquad \overset{(6.240)\text{式}}{\Downarrow} \\
&= \sum_i \alpha^i M(H_i)|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle' \quad + \quad \mu_j M(E_{-\alpha})|u_{\Lambda-(j-1)\alpha}\rangle' \\
&\qquad\qquad \overset{(6.233)\text{式}}{\Downarrow} \qquad\qquad\qquad \overset{(6.239)\text{式}}{\Downarrow} \\
&= \sum_i \alpha^i(\Lambda_i - j\alpha_i)|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle' \quad + \quad \mu_j|u_{\Lambda-j\alpha}\rangle',
\end{aligned}$$

故

$$\mu_{j+1} = \mu_j + \alpha\cdot\Lambda - j\alpha\cdot\alpha \quad (j \geqslant 0). \tag{6.241}$$

由于假设 $\varLambda+\alpha$ 不是权, 所以

$$M\left(E_\alpha\right)\left|u_\varLambda\right\rangle'=\mu_0\left|u_{\varLambda+\alpha}\right\rangle'=0, \tag{6.242}$$

故 $\mu_0=0$. 这样, 由 (6.241) 式可解到

$$\mu_j=j\alpha\cdot\varLambda-\frac{j\left(j-1\right)}{2}\alpha\cdot\alpha\quad\left(j\geqslant 0\right). \tag{6.243}$$

由于 $\varLambda-\left(q+1\right)\alpha$ 不是权, 由 (6.240) 式知, $\mu_{q+1}=0$, 由 (6.243) 式可解得

$$\frac{2\varLambda\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}=q=\text{正整数}. \tag{6.244}$$

(6.244) 式的正整数是在假设 $\varLambda$ 是权, 而 $\varLambda+\alpha$ 不是权的情况下得到的. 一般情况下, 设 $\varLambda$ 为权, 则不但 $\varLambda,\varLambda-\alpha,\cdots,\varLambda-q\alpha$ 是权 [$\varLambda-\left(q+1\right)\alpha$ 不是权], $\varLambda+\alpha,\varLambda+2\alpha,\cdots,\varLambda+p\alpha$ 也是权 [$\varLambda+\left(p+1\right)\alpha$ 不是权], 即含 $\varLambda$ 的 α 权链为

$$\varLambda+p\alpha,\varLambda+\left(p-1\right)\alpha,\cdots,\varLambda,\varLambda-\alpha,\cdots,\varLambda-q\alpha, \tag{6.245a}$$

若假设 $\varLambda'=\varLambda+p\alpha$, 则该权链亦可表示成

$$\varLambda',\varLambda'-\alpha,\cdots,\varLambda'-q'\alpha\quad\left(q'=p+q=\text{正整数}\right), \tag{6.245b}$$

该权链在形式上与 (6.238) 式相一致, 而

$$\begin{aligned}\frac{2\varLambda\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}=\frac{2\left(\varLambda'-p\alpha\right)\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}&=\frac{2\varLambda'\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}-\frac{2p\alpha\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}\\&=q'-2p=p+q-2p=q-p=\text{整数}.\end{aligned}$$

这样, $\varLambda-\left(q-p\right)\alpha=\varLambda+\left(p-q\right)\alpha$ 一定属于权链 (6.245) 式, 即

$$\varLambda-\frac{2\varLambda\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}\alpha$$

是权, 定理 6.9 中的 (1) 与 (2) 得证.

6.7.3 正则半单李代数的表示

1. 半单李代数不可约表示的最高权

设权 $\varLambda\left(\varLambda_1,\varLambda_2,\cdots,\varLambda_r\right)$, 若它的第一个不为零的分量为正, 则称此权为正权, 记作 $\varLambda>0$. 若两个权 $\varLambda^{(1)}$ 与 $\varLambda^{(2)}$ 的差

$$\varLambda^{(1)}-\varLambda^{(2)}=\left(\varLambda_1^{(1)}-\varLambda_1^{(2)},\varLambda_2^{(1)}-\varLambda_2^{(2)},\cdots,\varLambda_r^{(1)}-\varLambda_r^{(2)}\right)>0, \tag{6.246}$$

则说 $\varLambda^{(1)}$ 比 $\varLambda^{(2)}$ 高, 记作 $\varLambda^{(1)}>\varLambda^{(2)}$. 若某一权比所有其他的权都高, 则称其为最高权 (highest weight), 记作 $\varLambda_h$. 关于最高权有如下定理:

定理 6.10——最高权定理 设 M 是半单李代数 g 的一个不可约表示, 则 M 的最高权是单权. 若 M_1 与 M_2 是 g 的两个等价表示, 则它们的最高权相等.

由定理 6.10 知, 半单李代数的不可约表示与其最高权间有一一对应的关系, 这样就可以用最高权来标记半单李代数的不可约表示.

定理 6.11 设 M 是半单李代数 g 的一个不可约表示, $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_r\}$ 是 g 的一个单根系, 若 Λ_h 是 M 的最高权, 则对于任意的 $\pi_i \in \Pi$

$$\lambda_{\pi_i} = \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_i}{\pi_i \cdot \pi_i} = \text{正整数}. \tag{6.247}$$

该定理的充分性是显然的, 因为若 Λ_h 为最高权, $\pi_i \in \Pi$, 则由定理 6.9 知

$$\Lambda_h - \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_i}{\pi_i \cdot \pi_i}\pi_i$$

也是权. 因为 π_i 为正根, 若

$$\lambda_{\pi_i} = \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_i}{\pi_i \cdot \pi_i} < 0,$$

则

$$\Lambda_h - \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_i}{\pi_i \cdot \pi_i}\pi_i > \Lambda_h,$$

与 Λ_h 是最高权的假设相矛盾, 故 λ_{π_i} 应为正整数.

由定理 6.10 与定理 6.11 知, 半单李代数的不可约表示与正整数组 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}, \cdots, \lambda_{\pi_r})$ 一一对应, 所以也可以用这一组正整数来标记半单李代数的不可约表示, 由后面 6.7.5 节的讨论知, 该套正整数组还决定着不可约表示的维数.

按定理 6.9, 由正整数组 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}, \cdots, \lambda_{\pi_r})$ 可得由最高权及其等加权组成的权链系

$$\Lambda_h, \Lambda_h - \pi_i, \cdots, \Lambda_h - \lambda_{\pi_i}\pi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, r), \tag{6.248}$$

由定理 6.9 与定理 6.10 知, 上式中的各权都是单权, 构成一个单权系, 单权的数目等于不可约表示的维数. 对于给定的不可约表示, 单权系一定, 所以也可用单权系来标记不可约表示.

2. 半单李代数不可约表示的邓金图

采用邓金图可将半单李代数的不可约表示直观地表示出来. 方法是先画出半单李代数单根系 Π 的邓金图, 图中每一个圆圈或圆点代表了一个单根 π_i, 伴随这个单根 π_i, 记一个正整数 λ_{π_i}. 由上述讨论知, 这样的邓金图就代表着李代数的一个特定的不可约表示.

例 6.15 $A_1\left[SU(2)\text{与}SO(3)\right]$ 单纯李代数不可约表示的邓金图.

按规定与图 6.7, A_1 的不可约表示的邓金图如图 6.18 所示.

λ_{π_1}

○

π_1

图 6.18 $A_1\left[SU(2)\text{与}SO(3)\right]$ 单纯李代数不可约表示的邓金图

其中 λ_{π_1} 是正整数. 由于与根一样, 权也是 r 维空间的矢量, 所以与 (6.194) 式一样, A_1 的最高权可设为

$$\Lambda_h = a\pi_1, \tag{6.249}$$

其中 a 为常数, 按定义

$$\lambda_{\pi_1} = \frac{2\Lambda_h\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1} = 2a, \quad \Rightarrow a = \frac{\lambda_{\pi_1}}{2}, \tag{6.250}$$

故

$$\Lambda_h = \frac{\lambda_{\pi_1}}{2}\pi_1. \tag{6.251}$$

例 6.16 $A_2[SU(3)]$ 单纯李代数不可约表示的邓金图.

按规定与图 6.8, A_2 不可约表示的邓金图如图 6.19 所示.

λ_{π_1} λ_{π_2}

○——○

π_1 π_2

图 6.19 $A_2[SU(3)]$ 单纯李代数不可约表示的邓金图

其中 λ_{π_1}、λ_{π_2} 是正整数. 与 (6.194) 式一样, 最高权可设为

$$\Lambda_h = a\pi_1 + b\pi_2, \tag{6.252}$$

a、b 是展开系数. 按定义

$$\begin{aligned}
\lambda_{\pi_1} &= \frac{2\Lambda_h\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1} = \frac{2(a\pi_1+b\pi_2)\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1} = 2\left[a + \frac{b\pi_2\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1}\right] = 2a-b,\\
\lambda_{\pi_2} &= \frac{2\Lambda_h\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2} = \frac{2(a\pi_1+b\pi_2)\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2} = 2\left[\frac{a\pi_1\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2} + b\right] = -a+2b.
\end{aligned} \tag{6.253}$$

得

$$a = \frac{1}{3}(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}), \quad b = \frac{1}{3}(\lambda_{\pi_1}+2\lambda_{\pi_2}), \tag{6.254}$$

则最高权

$$\Lambda_h = \frac{1}{3}\left(2\lambda_{\pi_1} + \lambda_{\pi_2}\right)\pi_1 + \frac{1}{3}\left(\lambda_{\pi_1} + 2\lambda_{\pi_2}\right)\pi_2. \tag{6.255}$$

表明李代数 A_2 的最高权 Λ_h 由数组 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2})$ 唯一地确定. 反之, 数组 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2})$ 通过 (6.253) 式由最高权 Λ_h 唯一地确定.

例 6.17　$B_2\,[SO\,(5)]$ 单纯李代数不可约表示的邓金图.

按规定与图 6.9, B_2 不可约表示的邓金图如图 6.20 所示.

λ_{π_1}　　λ_{π_2}

π_1　　π_2

图 6.20　$B_2\,[SO\,(5)]$ 单纯李代数不可约表示的邓金图

若仍设其最高权有如 (6.252) 式的形式, 则

$$\begin{aligned}
\lambda_{\pi_1} &= \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_1}{\pi_1 \cdot \pi_1} = \frac{2\left(a\pi_1 + b\pi_2\right)\cdot \pi_1}{\pi_1 \cdot \pi_1} = 2\left[a + \frac{b\pi_2 \cdot \pi_1}{\pi_1 \cdot \pi_1}\right] = 2a - b,\\
\lambda_{\pi_2} &= \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_2}{\pi_2 \cdot \pi_2} = \frac{2\left(a\pi_1 + b\pi_2\right)\cdot \pi_2}{\pi_2 \cdot \pi_2} = 2\left[\frac{a\pi_1 \cdot \pi_2}{\pi_2 \cdot \pi_2} + b\right] = -2a + 2b,
\end{aligned} \tag{6.256}$$

得

$$a = \frac{1}{2}\left(2\lambda_{\pi_1} + \lambda_{\pi_2}\right), \quad b = \lambda_{\pi_1} + \lambda_{\pi_2}, \tag{6.257}$$

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\left(2\lambda_{\pi_1} + \lambda_{\pi_2}\right)\pi_1 + \left(\lambda_{\pi_1} + \lambda_{\pi_2}\right)\pi_2. \tag{6.258}$$

例 6.18　$D_2\,[SO\,(4)]$ 半单李代数不可约表示的邓金图.

按规定与图 6.10, D_2 李代数不可约表示的邓金图如图 6.21 所示.

λ_{π_1}　　λ_{π_2}

π_1　　π_2

图 6.21　$D_2\,[SO\,(4)]$ 半单李代数不可约表示的邓金图

最高权有如 (6.252) 式的形式, 则

$$\begin{aligned}
\lambda_{\pi_1} &= \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_1}{\pi_1 \cdot \pi_1} = \frac{2\left(a\pi_1 + b\pi_2\right)\cdot \pi_1}{\pi_1 \cdot \pi_1} = 2a,\\
\lambda_{\pi_2} &= \frac{2\Lambda_h \cdot \pi_2}{\pi_2 \cdot \pi_2} = \frac{2\left(a\pi_1 + b\pi_2\right)\cdot \pi_2}{\pi_2 \cdot \pi_2} = 2b.
\end{aligned} \tag{6.259}$$

得

$$a = \frac{\lambda_{\pi_1}}{2}, \quad b = \frac{\lambda_{\pi_2}}{2}, \tag{6.260}$$

则

$$\Lambda_h = \frac{\lambda_{\pi_1}}{2}\pi_1 + \frac{\lambda_{\pi_2}}{2}\pi_2. \tag{6.261}$$

3. 半单李代数不可约基础表示的邓金图

在邓金图中, 若只在一个圆圈或圆点上标 1, 其余的皆标零, 则这样的表示称为基础表示. 如, 对于 A_1 李代数, 基础表示的邓金图如图 6.22 所示.

1

○

π_1

图 6.22 $A_1\left[SU(2)\text{与}SO(3)\right]$ 单纯李代数不可约基础表示的邓金图

由 (6.251) 式知, 该基础表示的最高权为

$$\Lambda_{0h} = \frac{1}{2}\pi_1, \tag{6.262}$$

而任意表示 (λ_{π_1}) 的最高权 (6.251) 式可写成

$$\Lambda_h = \lambda_{\pi_1}\Lambda_{0h}. \tag{6.263}$$

另如, 对于 A_2 李代数, 两不可约基础表示的邓金图如图 6.23 所示.

1	0		0	1
○—○			○—○	
π_1	π_2		π_1	π_2
(a)			(b)	

图 6.23 $A_2\left[SU(3)\right]$ 单纯李代数两不可约基础表示的邓金图

(a)$(1,0)$; (b)$(0,1)$

由 (6.255) 式知, (a)、(b) 两者的最高权分别为

$$\Lambda_{0h}^{(1)} = \frac{1}{3}(2\pi_1 + \pi_2), \quad \Lambda_{0h}^{(2)} = \frac{1}{3}(\pi_1 + 2\pi_2), \tag{6.264}$$

而不可约表示 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2})$ 的最高权 (6.255) 式

$$\Lambda_h = \lambda_{\pi_1}\Lambda_{0h}^{(1)} + \lambda_{\pi_2}\Lambda_{0h}^{(2)}, \tag{6.265}$$

又如, 对于 B_2 李代数, 两不可约基础表示的邓金图如图 6.24 所示.

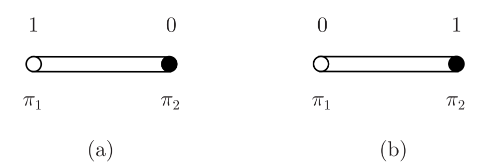


图 6.24　$B_2\,[SO\,(5)]$ 单纯李代数两不可约基础表示的邓金图

(a)(1, 0); (b)(0, 1)

由 (6.258) 式知, (a)、(b) 两者的最高权分别为

$$\varLambda_{0h}^{(1)} = \pi_1 + \pi_2, \quad \varLambda_{0h}^{(2)} = \frac{1}{2}\pi_1 + \pi_2, \tag{6.266}$$

而不可约表示 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2})$ 的最高权 (6.258) 式

$$\varLambda_h = \lambda_{\pi_1}\varLambda_{0h}^{(1)} + \lambda_{\pi_2}\varLambda_{0h}^{(2)}. \tag{6.267}$$

再如, 对于 D_2 李代数, 两不可约基础表示的邓金图如图 6.25 所示.

1　　0　　0　　1

○　　○　　○　　○

π_1　　π_2　　π_1　　π_2

(a)　　(b)

图 6.25　$D_2\,[SO\,(4)]$ 半单李代数两不可约基础表示的邓金图

(a)(1, 0); (b)(0, 1)

由 (6.261) 式知, (a)、(b) 两者的最高权分别为

$$\varLambda_{0h}^{(1)} = \frac{1}{2}\pi_1, \quad \varLambda_{0h}^{(2)} = \frac{1}{2}\pi_2, \tag{6.268}$$

而不可约表示 $\lambda_\pi = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2})$ 的最高权 (6.261) 式

$$\varLambda_h = \lambda_{\pi_1}\varLambda_{0h}^{(1)} + \lambda_{\pi_2}\varLambda_{0h}^{(2)}. \tag{6.269}$$

(6.263)、(6.265)、(6.267) 与 (6.269) 四式表明, A_1、A_2、B_2 与 D_2 各不可约表示的最高权 $\varLambda_h$ 为其基础表示最高权的线性叠加, 叠加系数为正整数 (λ_π). 推广到一般情况, 设某半单李代数的邓金图有 r 个圆圈或圆点, 则共有 r 个基础表示 $\left\{\varLambda_{0h}^{(1)}, \varLambda_{0h}^{(2)}, \cdots, \varLambda_{0h}^{(r)}\right\}$, 而不可约表示 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}, \cdots, \lambda_{\pi_r})$ 的最高权为

$$\varLambda_h = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{\pi_i}\varLambda_{0h}^{(i)}. \tag{6.270}$$

证明 设第 i 个基础表示的最高权为

$$\varLambda_{0h}^{(i)} = \sum_{k=1}^{r} a_k^i \pi_k, \tag{6.271}$$

在单根 π_j 上的正整数 $\lambda_{\pi_j}^{(i)} = \delta_{ij}$, 亦即

$$\lambda_{\pi_j}^{(i)} = \frac{2\varLambda_{0h}^{(i)} \cdot \pi_j}{\pi_j \cdot \pi_j} = \delta_{ij},$$

或

$$\lambda_{\pi_j}^{(i)} = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{r} \pi_k \cdot \pi_j a_k^i}{\pi_j \cdot \pi_j} = \delta_{ij}. \tag{6.272}$$

记

$$C_{kj} = \frac{2\pi_k \cdot \pi_j}{\pi_j \cdot \pi_j}, \tag{6.273}$$

则 (6.272) 式变为

$$\sum_{k=1}^{r} C_{kj} a_k^i = \delta_{ij}.$$

两边同乘 λ_{π_i} 并对 i 求和得

$$\sum_{k=1}^{r} C_{kj} \sum_{i=1}^{r} \lambda_{\pi_i} a_k^i = \lambda_{\pi_j}. \tag{6.274}$$

假设不可约表示 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}, \cdots, \lambda_{\pi_r})$ 的最高权为

$$\varLambda_h = \sum_{k=1}^{r} b_k \pi_k, \tag{6.275}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{2\varLambda_h \cdot \pi_j}{\pi_j \cdot \pi_j} = \lambda_{\pi_j}, \quad &\xrightarrow{(6.275)\text{式}} \quad \frac{2\sum\limits_{k=1}^{r} \pi_k \cdot \pi_j b_k}{\pi_j \cdot \pi_j} = \lambda_{\pi_j}, \\ &\xrightarrow{(6.273)\text{式}} \quad \sum_{k=1}^{r} C_{kj} b_k = \lambda_{\pi_j}.\end{aligned} \tag{6.276}$$

(6.274) 与 (6.276) 两式比较知

$$b_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{\pi_i} a_k^i. \tag{6.277}$$

这样, (6.275) 式可改写成

$$\Lambda_h=\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_{\pi_i}a_k^i\right)\pi_k=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{\pi_i}\sum_{k=1}^{r}a_k^i\pi_k\overset{(6.271)\text{式}}{=\!=\!=\!=}\sum_{i=1}^{r}\lambda_{\pi_i}\Lambda_{0h}^{(i)},$$

(6.270) 式得证.

4. 半单李代数不可约表示的杨图

4.6 节曾介绍过 $SU(l)$ 群不可约表示的杨图表示法, 由于李代数的表示也是其相应李群的表示, 所以李代数的不可约表示也可以用杨图描述.

由正整数组 $(\lambda_\pi)=(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2},\cdots,\lambda_{\pi_r})$, 可得另一组正整数 $[\nu]=[\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_r]$, 其中

$$\nu_i=\sum_{k=i}^{r}\lambda_{\pi_k}\quad(i=1,2,\cdots,r)\,. \tag{6.278}$$

显然

$$\begin{aligned}&\nu_1\geqslant\nu_2\geqslant\cdots\geqslant\nu_r\geqslant0,\\&\sum_{i=1}^{r}\nu_i=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=i}^{r}\lambda_{\pi_k}=p\,(\text{正整数})\,.\end{aligned} \tag{6.279}$$

可见正整数组 $[\nu]=[\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_r]$ 正好代表正整数 p 的一种分法或配分, 相应的杨图如图 4.6 所示, 正整数 $\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2},\cdots$ 正是该图中的参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$. 所以, 可以用正整数组 $[\nu]=[\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_r]$, 或杨图来标记半单李代数的不可约表示. 例如, 对于单纯李代数 $A_2\,[SU(3)]$ 的基础表示

$$\begin{aligned}&\left(\lambda_{\pi_1}^{(1)},\lambda_{\pi_2}^{(1)}\right)=(1,0)\,,\\&\nu_1=\lambda_{\pi_1}^{(1)}+\lambda_{\pi_2}^{(1)}=1,\ \nu_2=\lambda_{\pi_2}^{(1)}=0,\quad\Rightarrow[\nu_1,\nu_2]=[1,0]\,.\end{aligned} \tag{6.280}$$

杨图如图 6.26 所示.

图 6.26　$[\nu_1,\nu_2]=[1,0]$ 的杨图

对于基础表示

$$\begin{aligned}&\left(\lambda_{\pi_1}^{(2)},\lambda_{\pi_2}^{(2)}\right)=(0,1)\,,\\&\nu_1=\lambda_{\pi_1}^{(2)}+\lambda_{\pi_2}^{(2)}=1,\ \nu_2=\lambda_{\pi_2}^{(2)}=1,\quad\Rightarrow[\nu_1,\nu_2]=[1,1]\,,\end{aligned} \tag{6.281}$$

杨图如图 6.27 所示.

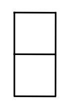


图 6.27 $[\nu_1, \nu_2] = [1, 1]$ 的杨图

因此, 对于半单李代数的不可约表示, 有多种标记方法: 最高权、单权系、正整数组 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}, \cdots, \lambda_{\pi_r})$、正整数组 $[\nu] = [\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r]$ 以及邓金图与杨图等. 标记方法各具特点, 彼此等价, 求得其一, 其他的也就知道了.

6.7.4 正则半单李代数不可约表示直积的分解

假设 $M^{(i)}$ 与 $M^{(j)}$ 是半单李代数 g 的两个不可约表示, 则一般来说它们的直积 $M^{(i)} \otimes M^{(j)}$ 是 g 的可约表示, 可展开成不可约表示的直和, 即

$$M^{(i)} \otimes M^{(j)} = \sum_k {}^{\oplus} a_{ijk} M^{(k)}, \tag{6.282}$$

其中 $M^{(k)}$ 是 g 的不可约表示, a_{ijk} 是 $M^{(k)}$ 在 $M^{(i)} \otimes M^{(j)}$ 中出现的次数. 关于 (6.282) 式的分解存在如下定理:

定理 6.12 设 $M^{(i)}$ 与 $M^{(j)}$ 是半单李代数 g 的两个不可约表示, 则直积表示 $M^{(i)} \otimes M^{(j)}$ 的权等于 $M^{(i)}$ 与 $M^{(j)}$ 权的算术和.

这样, 若 $M^{(i)}$ 与 $M^{(j)}$ 的单权系已知, 则按定理 6.12 就可以求得 $M^{(i)} \otimes M^{(j)}$ 的单权系. 将其与 g 的不可约表示的单权系相比较, 就可以确定 (6.282) 式的直积分解了.

例 6.19 求 $A_1[SU(2)$ 与 $SO(3)]$ 单纯李代数不可约基础表示直积的分解.

由 (6.262)与 (2.263)式知, $A_1\left[SU(2) 与 SO(3)\right]$ 不可约基础表示(1)的最高权为

$$\Lambda_{(1)h} = \frac{1}{2}\pi_1,$$

是秩 $r = 1$ 维空间的矢量 [参见 (6.202) 式], 由定理 6.9 知

$$\Lambda_{(1)h} - \frac{2\Lambda_{(1)h} \cdot \pi_1}{\pi_1 \cdot \pi_1}\pi_1 = -\frac{1}{2}\pi_1$$

也是权. 这样, 不可约基础表示 (1) 的单权系为

$$\Lambda_{(1)} = \left\{\frac{1}{2}\pi_1, -\frac{1}{2}\pi_1\right\}. \tag{6.283}$$

再按定理 6.12, 直积表示 (1) ⊗ (1) 的单权系为

$$\Lambda_{(1)\otimes(1)} = \{\pi_1, 0, -\pi_1, 0\}\,. \tag{6.284}$$

又由 (6.262) 与 (6.263) 式知, 不可约表示 (2) 的最高权为

$$\Lambda_{(2)h} = \pi_1.$$

而

$$\frac{2\Lambda_{(2)h}\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1} = 2,$$

由定理 6.9, 不可约表示 (2) 的单权系为

$$\Lambda_{(2)} = \{\pi_1, 0, -\pi_1\}\,. \tag{6.285}$$

另由 (6.263) 式知, 不可约表示 (0) 的最高权为 $\Lambda_{(0)h} = 0$, 单权系为

$$\Lambda_{(0)} = \{0\}\,. \tag{6.286}$$

比较 (6.284)、(6.285) 与 (6.286) 三式得

$$\Lambda_{(1)\otimes(1)} = \Lambda_{(2)} + \Lambda_{(0)}, \tag{6.287}$$

表明

$$(1)\otimes(1) = (2)\oplus(0)\,, \tag{6.288}$$

与各表示相应的正整数组 (λ_π) 与 $[\nu]$ 分别为

$$\begin{aligned}
(\lambda_{\pi_1}) &= (1)\,, \quad &\Rightarrow [\nu_1] = [1]\,,\\
(\lambda_{\pi_1}) &= (2)\,, \quad &\Rightarrow [\nu_1] = [2]\,,\\
(\lambda_{\pi_1}) &= (0)\,, \quad &\Rightarrow [\nu_1] = [0]\,.
\end{aligned}$$

由该套数组可画出与 (6.288) 式相应的杨图, 结果就是 4.6 节的杨图 4.14.

例 6.20　求 $A_2\,[SU\,(3)]$ 不可约基础表示 $(1,0)$ 与 $(1,0)$ 直积的分解.

由 (6.264) 与 (6.265) 式知, 不可约表示 $(1,0)$ 的最高权为

$$\Lambda_{(1,0)h} = \frac{1}{3}\,(2\pi_1 + \pi_2)\,,$$

由定理 6.9 知

$$\Lambda_{(1,0)h} - \frac{2\Lambda_{(1,0)h}\cdot\pi_i}{\pi_i\cdot\pi_i}\pi_i$$

也是不可约表示 $(1,0)$ 的权. 由于

$$\frac{2\Lambda_{(1,0)h}\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1}=1,\quad \frac{2\Lambda_{(1,0)h}\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2}=0,$$

故

$$\Lambda_{(1,0)h}-\pi_1=\frac{1}{3}\left(-\pi_1+\pi_2\right) \tag{6.289}$$

是不可约表示 $(1,0)$ 的权. 又

$$\frac{2\left(\Lambda_{(1,0)h}-\pi_1\right)\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1}=1-2=-1,\quad \frac{2\left(\Lambda_{(1,0)h}-\pi_1\right)\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2}=0+1=1,$$

则

$$\Lambda_{(1,0)h}-\pi_1+\pi_1=\Lambda_{(1,0)h}$$

不构成新权, 而

$$\Lambda_{(1,0)h}-\pi_1-\pi_2=-\frac{1}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right) \tag{6.290}$$

也是不可约表示 $(1,0)$ 的权. 这样 $A_2\left[SU(3)\right]$ 李代数的不可约表示 $(1,0)$ 的单权系为

$$\Lambda_{(1,0)}=\left\{\frac{1}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right),-\frac{1}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right),\frac{1}{3}\left(-\pi_1+\pi_2\right)\right\}, \tag{6.291}$$

各单权都是 $r=2$ 维空间的矢量 [参见 (6.203) 式]. 同样的讨论知, 不可约表示 $(0,1)$ 的单权系为

$$\Lambda_{(0,1)}=-\Lambda_{(1,0)}=\left\{-\frac{1}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right),\frac{1}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right),\frac{1}{3}\left(\pi_1-\pi_2\right)\right\}, \tag{6.292}$$

按照定理 6.12, 直积表示 $(1,0)\otimes(1,0)$ 的单权系为

$$\begin{aligned}\Lambda_{(1,0)\otimes(1,0)}=\Big\{&\frac{2}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right),\frac{1}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right),\frac{1}{3}\left(\pi_1-\pi_2\right),\\&\frac{1}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right),\frac{2}{3}\left(-\pi_1+\pi_2\right),-\frac{1}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right),\\&\frac{1}{3}\left(\pi_1-\pi_2\right),-\frac{1}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right),-\frac{2}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{6.293}$$

又由 (6.264) 与 (6.265) 式知, 不可约表示 $(2,0)$ 的最高权为

$$\Lambda_{(2,0)h}=\frac{2}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right). \tag{6.294}$$

由前面同样的讨论可得不可约表示 $(2,0)$ 的单权系为

$$\begin{aligned}\Lambda_{(2,0)}=\Big\{&\frac{2}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right),\frac{1}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right),\ \frac{2}{3}\left(-\pi_1+\pi_2\right),\\&\frac{1}{3}\left(\pi_1-\pi_2\right),-\frac{2}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right),-\frac{1}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right)\Big\},\end{aligned} \tag{6.295}$$

由 6 个单权组成. 由 (6.292)、(6.293) 与 (6.295) 三式知

$$\Lambda_{(1,0)\otimes(1,0)} = \Lambda_{(2,0)} + \Lambda_{(0,1)}, \tag{6.296}$$

故得直积表示的分解

$$(1,0)\otimes(1,0) = (2,0)\oplus(0,1)\,. \tag{6.297}$$

相应的正整数组 (λ_π) 与 $[\nu]$ 分别为

$$\begin{aligned}
(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2}) &= (1,0)\,, \quad \Rightarrow [\nu_1,\nu_2] = [1,0]\,,\\
(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2}) &= (2,0)\,, \quad \Rightarrow [\nu_1,\nu_2] = [2,0]\,,\\
(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2}) &= (0,1)\,, \quad \Rightarrow [\nu_1,\nu_2] = [1,1]\,,
\end{aligned}$$

由该套数组可画出与 (6.297) 式相应的杨图, 结果就是 4.6 节的杨图 4.12.

例 6.21　证明 $A_2\,[SU\,(3)]$ 单纯李代数不可约基础表示 $(0,1)$ 的单权系 (6.292) 式.

证明　由 (6.264) 与 (6.265) 式知, 不可约表示 $(0,1)$ 的最高权为

$$\Lambda_{(0,1)h} = \frac{1}{3}\,(\pi_1 + 2\pi_2)\,,$$

则

$$\frac{2\Lambda_{(0,1)h}\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1} = 0, \quad \frac{2\Lambda_{(0,1)h}\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2} = 1,$$

所以

$$\Lambda_{(0,1)h} - \pi_2 = \frac{1}{3}\,(\pi_1 - \pi_2) \tag{6.298}$$

是权. 再

$$\frac{2\left(\Lambda_{(0,1)h} - \pi_2\right)\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1} = 0 + 1 = 1, \quad \frac{2\left(\Lambda_{(0,1)h} - \pi_2\right)\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2} = 1 - 2 = -1,$$

则

$$\Lambda_{(0,1)h} - \pi_2 - \pi_1 = -\frac{1}{3}\,(2\pi_1 + \pi_2) \tag{6.299}$$

是权, 而

$$\Lambda_{(0,1)h} - \pi_2 + \pi_2 = \Lambda_{(0,1)h}$$

不是新权. (6.298)、(6.299) 式再加上最高权 $\Lambda_{(0,1)h}$ 本身即为 (6.292) 式的单权系 $\Lambda_{(0,1)}$.

例 6.22　证明 $A_2\,[SU\,(3)]$ 单纯李代数不可约表示 $(2,0)$ 的单权系 (6.295) 式.

证明　由 (6.294) 式知, 不可约表示 $(2,0)$ 的最高权为

$$\varLambda_{(2,0)h}=\frac{2}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right),$$

则

$$\frac{2\varLambda_{(2,0)h}\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1}=2,\quad \frac{2\varLambda_{(2,0)h}\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2}=0,$$

由定理 6.9 知

$$\varLambda_{(2,0)h}-\pi_1=\frac{1}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right),\quad \varLambda_{(2,0)h}-2\pi_1=\frac{2}{3}\left(-\pi_1+\pi_2\right), \tag{6.300}$$

是权. 又

$$\frac{2\left(\varLambda_{(2,0)h}-\pi_1\right)\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1}=2-2=0,\quad \frac{2\left(\varLambda_{(2,0)h}-\pi_1\right)\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2}=0+1=1,$$

则

$$\varLambda_{(2,0)h}-\pi_1-\pi_2=\frac{1}{3}\left(\pi_1-\pi_2\right) \tag{6.301}$$

是权. 再

$$\frac{2\left(\varLambda_{(2,0)h}-2\pi_1\right)\cdot\pi_1}{\pi_1\cdot\pi_1}=2-4=-2,\quad \frac{2\left(\varLambda_{(2,0)h}-2\pi_1\right)\cdot\pi_2}{\pi_2\cdot\pi_2}=0+2=2,$$

则

$$\varLambda_{(2,0)h}-2\pi_1+2\pi_1=\varLambda_{(2,0)h}\ \text{与}\ \varLambda_{(2,0)h}-2\pi_1+\pi_1=\varLambda_{(2,0)h}-\pi_1$$

不构成新权, 而

$$\varLambda_{(2,0)h}-2\pi_1-\pi_2=-\frac{1}{3}\left(2\pi_1+\pi_2\right)\ \text{与}\ \varLambda_{(2,0)h}-2\pi_1-2\pi_2=-\frac{2}{3}\left(\pi_1+2\pi_2\right) \tag{6.302}$$

是权. (6.300)~(6.302) 式再加上 $\varLambda_{(2,0)h}$ 本身就是 (6.295) 式的单权系 $\varLambda_{(2,0)}$, 证毕.

6.7.5　正则半单李代数不可约表示的维数

正则半单李代数不可约表示的维数由如下定理给出:

定理 6.13　设 M 是半单李代数 g 的不可约表示, 其最高权为 $\varLambda_h$, 则不可约表示的维数

$$d\left(M\right)=\prod_{\alpha\in\varSigma^+}\frac{\left(\varLambda_h+w\right)\cdot\alpha}{w\cdot\alpha}, \tag{6.303}$$

这里的 $\varSigma^+$ 为正根的集合, 而

$$w=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\varSigma^+}\alpha, \tag{6.304}$$

为正根之和的一半.

例 6.23　$A_1\left[SU(2)\text{与}SO(3)\right]$ 李代数不可约表示的维数.

A_1 只有一个正根, 即单根 (6.202) 式, 所以

$$\Sigma^+ = \{\pi_1\}, \qquad \Rightarrow w = \frac{1}{2}\pi_1, \tag{6.305}$$

另由 (6.251) 式知, 对于不可约表示 (λ_{π_1}), 其最高权为

$$\Lambda_h = \frac{\lambda_{\pi_1}}{2}\pi_1,$$

则由 (6.303) 式知, 不可约表示 (λ_{π_1}) 的维数为

$$d(\lambda_{\pi_1}) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+}\frac{(\Lambda_h + w)\cdot\alpha}{w\cdot\alpha} = \frac{(\lambda_{\pi_1}+1)(\pi_1\cdot\pi_1)/2}{(\pi_1\cdot\pi_1)/2} = \lambda_{\pi_1}+1, \tag{6.306}$$

表明 $A_1[SU(2)$ 与 $SO(3)]$ 李代数的不可约表示是 $\lambda_{\pi_1}+1$ 维的, 与 (4.168) 式相一致. 例如, 对于 $\lambda_{\pi_1} = 0$、1 与 2

$$d(0) = 1,\ d(1) = 2,\ d(2) = 3. \tag{6.307}$$

注意到 λ_{π_1} 取正整数, (6.306) 式与第 5 章给出的 $SU(2)$ 或 $SO(3)$ 群不可约表示的维数也相一致 [参见如 (5.42) 或 (5.54) 式].

例 6.24　$A_2[SU(3)]$ 李代数不可约表示的维数.

如图 6.5 所示, $A_2[SU(3)]$ 李代数有三个正根: 两个单根 $\pi_1 = \beta, \pi_2 = -(\beta-\alpha)$, 另一正根 $\alpha = \pi_1 + \pi_2$, 所以

$$\Sigma^+ = \{\pi_1, \pi_2, \pi_1+\pi_2\}, \quad \Rightarrow w = \pi_1 + \pi_2, \tag{6.308}$$

再由 (6.255) 式知, 对于不可约表示 $(\lambda_\pi) = (\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2})$, A_2 的最高权为

$$\Lambda_h = \frac{1}{3}(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2})\pi_1 + \frac{1}{3}(\lambda_{\pi_1}+2\lambda_{\pi_2})\pi_2,$$

这样, 不可约表示的维数为

$$\begin{aligned} d(\lambda_{\pi_1}, \lambda_{\pi_2}) &= \prod_{\alpha\in\Sigma^+}\frac{(\Lambda_h+w)\cdot\alpha}{w\cdot\alpha} \\ &= \frac{(\Lambda_h+w)\cdot\pi_1}{w\cdot\pi_1}\frac{(\Lambda_h+w)\cdot\pi_2}{w\cdot\pi_2}\frac{(\Lambda_h+w)\cdot(\pi_1+\pi_2)}{w\cdot(\pi_1+\pi_2)}, \end{aligned} \tag{6.309}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{(\Lambda_h+w)\cdot\pi_1}{w\cdot\pi_1}&=\frac{[(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+3)\,\pi_1/3+(\lambda_{\pi_1}+2\lambda_{\pi_2}+3)\,\pi_2/3]\cdot\pi_1}{(\pi_1+\pi_2)\cdot\pi_1}\\&=\frac{(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+3)\,\pi_1^2/3-(\lambda_{\pi_1}+2\lambda_{\pi_2}+3)\,\pi_1^2/6}{\pi_1^2/2}\\&=\lambda_{\pi_1}+1,\end{aligned}$$

由第 1 到第 2 等式用到了关系：π_1 与 π_2 间的夹角为 $120°$, $|\pi_1|=|\pi_2|$. 同样的计算可得

$$\frac{(\Lambda_h+w)\cdot\pi_2}{w\cdot\pi_2}=\lambda_{\pi_2}+1,\quad \frac{(\Lambda_h+w)\cdot(\pi_1+\pi_2)}{w\cdot(\pi_1+\pi_2)}=\frac{1}{2}\,(\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+2)\,.$$

将以上诸式代入 (6.309) 式得

$$d\,(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2})=\frac{1}{2}\,(\lambda_{\pi_1}+1)\,(\lambda_{\pi_2}+1)\,(\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+2)\,,\tag{6.310}$$

该结果与 4.6 节给出的计算 $SU(3)$ 群不可约表示的维数公式 (4.169) 式相一致. 如, 对于表示 (1, 0)、(0, 1) 与 (2, 0)

$$d\,(1,0)=3,\ d\,(0,1)=\bar{3},\ d\,(2,0)=6.\tag{6.311}$$

例 6.25 $B_2\,[SO\,(5)]$ 李代数不可约表示的维数.

由图 6.4(a) 知, B_2 有四个正根：两个单根 $\pi_1=-(\beta-2\alpha)\,,\pi_2=\beta-\alpha$, 外加两个正根 $\alpha=\pi_1+\pi_2$ 及 $\beta=\pi_1+2\pi_2$, 所以

$$\Sigma^+=\{\pi_1,\pi_2,\pi_1+\pi_2,\pi_1+2\pi_2\}\,,\quad\Rightarrow w=\frac{1}{2}\,(3\pi_1+4\pi_2)\,,\tag{6.312}$$

再由 (6.258) 式知, 对于不可约表示 $(\lambda_\pi)=(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2})$, B_2 的最高权为

$$\Lambda_h=\frac{1}{2}\,(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2})\,\pi_1+(\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2})\,\pi_2,$$

则

$$\begin{aligned}d\,(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2})=\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\frac{(\Lambda_h+w)\cdot\alpha}{w\cdot\alpha}&=\frac{(\Lambda_h+w)\cdot\pi_1}{w\cdot\pi_1}\frac{(\Lambda_h+w)\cdot\pi_2}{w\cdot\pi_2}\\&\quad\times\frac{(\Lambda_h+w)\cdot(\pi_1+\pi_2)}{w\cdot(\pi_1+\pi_2)}\frac{(\Lambda_h+w)\cdot(\pi_1+2\pi_2)}{w\cdot(\pi_1+2\pi_2)},\end{aligned}\tag{6.313}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{(\varLambda_h+w)\cdot\pi_1}{w\cdot\pi_1}&=\frac{\left[\left(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+3\right)\pi_1/2+\left(\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+2\right)\pi_2\right]\cdot\pi_1}{\left(3\pi_1+4\pi_2\right)\cdot\pi_1/2}\\&=\frac{\left(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+3\right)\pi_2^2-\left(\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+2\right)\pi_2^2}{\pi_2^2}\\&=\lambda_{\pi_1}+1,\end{aligned}$$

由第 1 到第 2 等式用到了关系：π_1 与 π_2 间的夹角为 $135°$, $|\pi_1|=\sqrt{2}\,|\pi_2|$. 同样的计算可得

$$\begin{aligned}\frac{(\varLambda_h+w)\cdot\pi_2}{w\cdot\pi_2}&=\lambda_{\pi_2}+1,\\\frac{(\varLambda_h+w)\cdot(\pi_1+\pi_2)}{w\cdot(\pi_1+\pi_2)}&=\frac{1}{3}\left(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+3\right),\\\frac{(\varLambda_h+w)\cdot(\pi_1+2\pi_2)}{w\cdot(\pi_1+2\pi_2)}&=\frac{1}{2}\left(\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+2\right),\end{aligned}$$

将以上各式代入 (6.313) 式得

$$d\left(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2}\right)=\frac{1}{6}\left(\lambda_{\pi_1}+1\right)\left(\lambda_{\pi_2}+1\right)\left(\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+2\right)\left(2\lambda_{\pi_1}+\lambda_{\pi_2}+3\right). \tag{6.314}$$

例 6.26　$D_2\left[SO\left(4\right)\right]$ 半单李代数不可约表示的维数.

如图 6.6 所示, D_2 有两个正根, 也是单根, 如 (6.205) 式所示. 这样

$$\varSigma^+=\left\{\pi_1,\pi_2\right\},\quad\Rightarrow w=\frac{1}{2}\left(\pi_1+\pi_2\right), \tag{6.315}$$

不可约表示 $(\lambda_\pi)=(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2})$ 的最高权是 (6.261) 式

$$\varLambda_h=\frac{\lambda_{\pi_1}}{2}\pi_1+\frac{\lambda_{\pi_2}}{2}\pi_2,$$

按 (6.303) 式, 不可约表示 $(\lambda_\pi)=(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2})$ 的维数

$$\begin{aligned}d\left(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2}\right)=\prod_{\alpha\in\varSigma^+}\frac{(\varLambda_h+w)\cdot\alpha}{w\cdot\alpha}&=\frac{(\varLambda_h+w)\cdot\pi_1}{w\cdot\pi_1}\frac{(\varLambda_h+w)\cdot\pi_2}{w\cdot\pi_2}\\&=\frac{\left(\lambda_{\pi_1}/2+1/2\right)}{1/2}\frac{\left(\lambda_{\pi_2}/2+1/2\right)}{1/2},\end{aligned}$$

亦即

$$d\left(\lambda_{\pi_1},\lambda_{\pi_2}\right)=\left(\lambda_{\pi_1}+1\right)\left(\lambda_{\pi_2}+1\right). \tag{6.316}$$

6.8　A_1、A_2 与 A_3 李代数表示的单权系及其本征态的夸克表示

本节为了物理上的需要, 将 $A_1\,[SU\,(2)]$、$A_2\,[SU\,(3)]$ 与 $A_3\,[SU\,(4)]$ 李代数表示的单权系与物质结构的最小单元——夸克 (quark) 相联系, 给出它们的单权系及其本征态的夸克表示, 揭示强子 (介子 + 重子) 的味道对称性.

6.8.1　六味夸克及其性质

理论与实验都表明, 自然界共有 u、d、s、c、b、t 六种夸克, 或者说夸克共有六种味道 (flavor), 它们的性质如表 6.2 所示.

表 6.2　六味夸克及其性质

性质 / 夸克	电荷 $Q\,(e)$	组分质量 $m(\text{GeV})$	自旋 $s(\hbar)$	同位旋 I	I 的第 3 分量I_3	重子数 b	奇异数 S	粲数 C	底数 B	顶数 T
u	2/3	0.31	1/2	1/2	1/2	1/3	0	0	0	0
d	−1/3	0.31	1/2	1/2	−1/2	1/3	0	0	0	0
s	−1/3	0.48	1/2	0	0	1/3	−1	0	0	0
c	2/3	1.65	1/2	0	0	1/3	0	1	0	0
b	−1/3	5.0	1/2	0	0	1/3	0	0	−1	0
t	2/3	174.3	1/2	0	0	1/3	0	0	0	1

每味夸克又有三种颜色, 所以由夸克组成的强子, 其波函数可写成

$$\text{强子波函数} = \text{时空波函数} \times \text{味道波函数} \times \text{自旋波函数} \times \text{颜色波函数}. \tag{6.317}$$

由表 6.2 知, u、d 夸克除同位旋 (isospin) 第 3 分量与电荷不同外, 其他量子数都相同. 由于强作用与电荷无关, 因此从强作用的角度来看, 两者没有什么区别. 如同一个电子有自旋向上与向下两种状态一样, 它们可以看成是同一种夸克 (记为 q_I) 的两种不同的同位旋状态. 类似于电子自旋的处理, 这里取 u、d 夸克的同位旋算符为

$$I_i = \frac{\sigma_i}{2}\,(i=1,2,3)\,, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6.318}$$

如 (4.86) 式所示, 它们是 $SU\,(2)$ 群的生成元, 即

$$SU\,(2) = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3} \alpha_i I_i\right). \tag{6.319}$$

而 u、d 夸克的同位旋波函数取为

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\tag{6.320}$$

它们分别是同位旋算符 I_3 本征值为 1/2 与 −1/2 的本征态. 二者构成同位旋空间的基矢, 任意的同位旋波函数都可用它们作展开, 即对于任意的同位旋波函数

$$\chi_I=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},$$

有

$$\chi_I=au+bd,$$

在同位旋空间的旋转变换下, 按规律

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=SU(2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\tag{6.321}$$

做变换. 考虑绕第 2 轴转角为 π 的特殊转动

$$SU(2)=\exp(-\mathrm{i}\pi I_2)=\exp\left(-\mathrm{i}\sigma_2\frac{\pi}{2}\right).\tag{6.322a}$$

注意到 $\sigma_2^2=I$, 其中 I 为 2×2 单位矩阵, 由 (4.109) 式得

$$SU(2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{i}\sigma_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{i}\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.\tag{6.322b}$$

这样, (6.321) 式变为

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad\Rightarrow a'=-b,\ b'=a.\tag{6.323}$$

对于反夸克, 为了与夸克情况一样, 使正电荷夸克的同位旋第 3 分量为 1/2, 负电荷夸克的为 −1/2, 且在同位旋空间的旋转变换下与夸克具有相同的变换形式, 其同位旋波函数应取为

$$\bar{\chi}_I=\begin{pmatrix}-\bar{b}\\\bar{a}\end{pmatrix}=-\bar{b}\bar{d}+\bar{a}\bar{u}.\tag{6.324}$$

在 (6.322) 式的特殊变换下, 有

$$\begin{pmatrix}-\bar{b}'\\\bar{a}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{b}\\\bar{a}\end{pmatrix},\quad\Rightarrow\bar{a}'=-\bar{b},\ \bar{b}'=\bar{a},\tag{6.325}$$

与 (6.323) 式形式相同. (6.324) 式表明, 由夸克到反夸克, 同位旋空间的基矢作变换

$$u\Rightarrow-\bar{d},\quad d\Rightarrow\bar{u}.\tag{6.326}$$

6.8.2 $A_1[SU(2)]$ 基础表示的单权系及其本征态的夸克表示

由 (6.202) 与 (6.283) 式知, $A_1\left[SU\left(2\right)\right]$ 李代数基础表示的单权系为

$$\Lambda_{(1)} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\right) \right\}, \tag{6.327}$$

两单权都是模为 1/2 的 1 维权空间的矢量, 位置相对于坐标原点对称. 考虑到

$$u\left(I_3\right) = u\left(\frac{1}{2}\right), \quad d\left(I_3\right) = d\left(-\frac{1}{2}\right), \tag{6.328}$$

可将 1 维权空间取成同位旋第 3 分量 I_3, 则单权系 (6.327) 式可用 u、d 夸克表示成

$$\Lambda_{(1)} = \{u, d\}, \tag{6.329}$$

是 $A_1\left[SU\left(2\right)\right]$ 李代数的 2 维不可约表示的单权系 [注：如 6.7.3 节所述, 单权系中单权的数目等于表示的维数, 另参见 (6.307) 式], 其权图如图 6.28 所示.

$-\frac{1}{2}$ O $\frac{1}{2}$ I_3

d u

图 6.28 $A_1\left[SU\left(2\right)\right]$ 基础表示的权图

各单权的本征态, 即由本征值方程 (6.233) 求得的波函数即为 (6.320) 式, 或

$$\begin{aligned} &|I = 1/2, I_3 = 1/2\rangle = u, \\ &|I = 1/2, I_3 = -1/2\rangle = d, \end{aligned} \quad \text{同位旋二重态.} \tag{6.330}$$

这里要注意的是 u 与 d 符号的双重角色, 在单权系 (6.329) 式中, 二者代表单权, 是本征值方程 (6.233) 式中的本征值. 而在 (6.330) 式中, 二者又是波函数, 是本征值方程 (6.233) 中的本征态. 所以用在不同的地方, 符号 u 与 d 的意义有所不同, 对于后面出现的夸克符号, 也存在这样的差异, 需注意区分.

6.8.3 $A_1[SU(2)]$ 基础表示直积的单权系及其本征态的夸克表示

由 (4.178) 式知

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1,$$

即基础表示 (1) 的直积是 3 维与 1 维不可约表示的直和. 由 (6.202) 与 (6.284) 式知, 基础表示直积的单权系为

$$\Lambda_{(1)\otimes(1)} = \{(1), (0), (-1), (0)\}, \tag{6.331a}$$

或如 (6.329) 式, 用夸克表示成

$$\Lambda_{(1)\otimes(1)} = \{uu, ud, dd, du\}, \tag{6.331b}$$

各单权的值等于各组成夸克权的算数和, 其中单权 (1) 与 (−1) 各有一种夸克组合, 分别为 uu 与 dd, 而单权 (0) 存在简并, 有两种组合, 各为 ud 与 du. 4 个单权中的 3 个是 3 维表示的权, 1 个是 1 维表示的权. 考虑到同一同位旋两相邻态间的 I_3 之差只能是 ±1, 所以 3 维表示的 3 个单权应取成 $I_3 = (1, 0, -1)$, 1 维表示的单权为 $I_3 = 0$. 与各单权相应的本征态显然应是

$$\begin{cases} |I=1, I_3=1\rangle = uu, \\ |I=1, I_3=0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ud+du), \text{同位旋三重态}, \\ |I=1, I_3=-1\rangle = dd, \end{cases}$$
$$|I=0,\ I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du), \text{同位旋单态}. \tag{6.332}$$

上式与两电子的自旋波函数 (5.176) 式在形式上一样，差别仅在于自旋向上与向下的波函数分别用 u 与 d 代替. (6.332) 式表明，三重态是对称态，波函数对于两夸克的交换是对称的，单态是反对称态，对于两夸克的交换是反对称的. 图 6.29 给出了单权系 (6.331) 式的权图，图中各单权用其本征态表示.

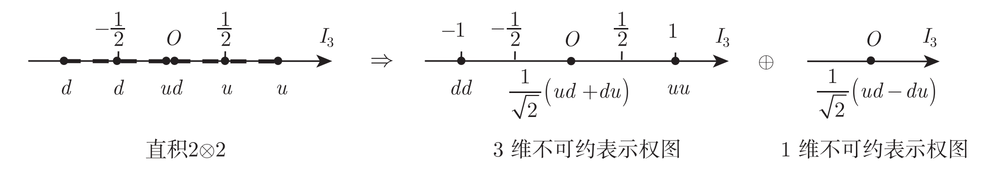


图 6.29　$A_1[SU(2)]$ 基础表示直积 $2\otimes 2$ 的权图

由 (6.332) 式知，对于仅有单一夸克组合的 $I_3 = \pm 1$ 的两个单权，其本征态与各单权的夸克组合形式相同，对于具有两种夸克组合的 $I_3 = 0$ 的两个单权，其本征态是各单权夸克组合的线性组合，这是单权与其本征态间夸克组合的重要关系. 一般情况下，权值相等 (存在简并) 的各单权，其本征态是相关单权夸克组合的线性组合，单一夸克组合的单权，其本征态的夸克组合与其单权的相同.

由于波函数 (6.332) 式是由不同味道的夸克组成的，所以通常称它们为味道波函数. 在 (6.332) 式中，对其中的一组 u、d 夸克作 (6.326) 式的代换，可得由 q_I 与

$\bar{q}_I$ 夸克组成的味道波函数，结果为

$$\begin{cases} \left|I=1,I_3=1\right\rangle = u\bar{d}, \\ \left|I=1,I_3=0\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u}-d\bar{d}\right),\text{同位旋三重态}, \\ \left|I=1,I_3=-1\right\rangle = d\bar{u}, \end{cases} \tag{6.333}$$
$$\left|I=0,I_3=0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u}+d\bar{d}\right),\text{同位旋单态},$$

其中 $I_3=1$ 的波函数略去了一负号.

6.8.4　$A_1[SU(2)]$ 三重基础表示直积的单权系及其本征态的夸克表示

由 (4.178b) 与 (4.179b) 式知

$$2\otimes 2\otimes 2=(3\oplus 1)\otimes 2=4\oplus 2\oplus 2,$$

即 $A_1\left[SU(2)\right]$ 三重基础表示的直积是 4 维与两个 2 维不可约表示的直和，其单权系由 8 个单权组成，可由 (6.329) 与 (6.331b) 式简单地求得，这里就不罗列了. 相应的权图可在图 6.29 的基础上画出，如图 6.30 所示.

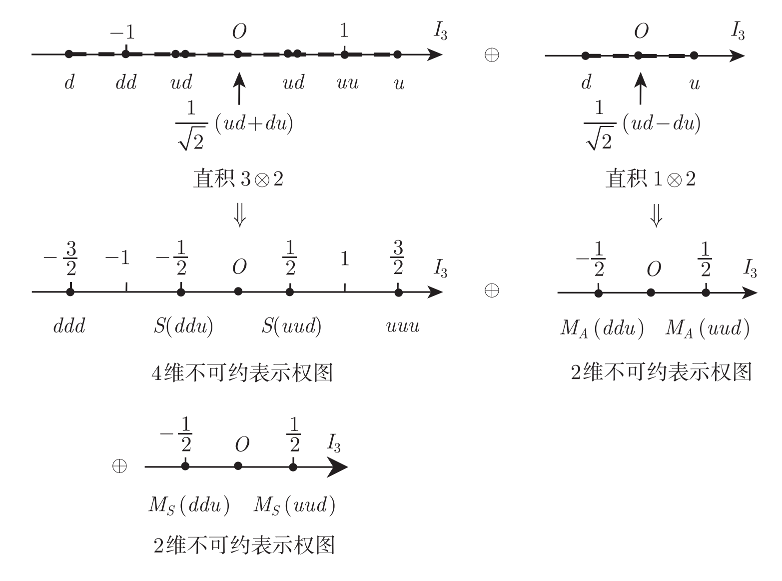


图 6.30　$A_1\left[SU(2)\right]$ 三重基础表示直积 $2\otimes 2\otimes 2$ 的权图

图中各单权用其本征态表示，分别为

$$\begin{cases} |I=3/2, I_3=3/2\rangle = uuu, \\ |I=3/2, I_3=1/2\rangle = S(uud) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[uud+(ud+du)\,u\right], \\ |I=3/2, I_3=-1/2\rangle = S(ddu) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ddu+(ud+du)\,d\right], \\ |I=3/2, I_3=-3/2\rangle = ddd, \end{cases} \quad \text{同位旋 4 重态.} \tag{6.334}$$

$$\begin{cases} |I=1/2, I_3=1/2\rangle = M_A(uud) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(ud-du)\,u, \\ |I=1/2, I_3=-1/2\rangle = M_A(ddu) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(ud-du)\,d, \end{cases} \quad \text{同位旋 2 重态.} \tag{6.335}$$

$$\begin{cases} |I=1/2, I_3=1/2\rangle = M_S(uud) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(ud+du)\,u-2uud\right], \\ |I=1/2, I_3=-1/2\rangle = M_S(ddu) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(ud+du)\,d-2ddu\right], \end{cases} \quad \text{同位旋 2 重态.} \tag{6.336}$$

其中波函数 $S\,(uud)$ 与 $S\,(ddu)$ 是对称波函数，二者对于波函数中三个夸克的交换是对称的，分别来自于直积 $3\otimes 2$ 中原点正、负两侧的波函数 u、d 与其左、右单权处波函数的组合. $M_A(uud)$ 与 $M_A(ddu)$ 是混合反对称波函数，二者对于波函数中的头两个夸克的交换是反对称的，来自于直积 $1\otimes 2$ 中原点处的波函数 $(ud-du)/\sqrt{2}$ 与其左、右波函数 u 与 d 的组合. $M_S(uud)$ 与 $M_S(ddu)$ 是混合对称波函数，对于波函数中的头两个夸克的交换是对称的，出处与 $S\,(uud)$ 及 $S\,(ddu)$ 一样，也是来自于直积 $3\otimes 2$ 中原点正、负两侧的波函数 u、d 与其左、右单权处波函数的组合，具体形式由波函数间的正交归一条件确定. 直积 $3\otimes 2$ 中之所以存在两套 $I_3=\pm 1/2$ 的本征态，是由于权值 $I_3=\pm 1/2$ 的夸克组合方式各有两套 (简并度各为 2)，来自于原点正侧或负侧的 u、d 夸克分别与其左、右单权处夸克的组合. 味道波函数的这种确定方法在后面的讨论中将经常用到.

6.8.5　$\boldsymbol{A_2[SU(3)]}$ 基础表示的单权系及其本征态的夸克表示

$A_2[SU(3)]$ 李代数的基础表示有 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 两个，它们的单权系分别由 (6.291) 与 (6.292) 式给出，将 (6.203) 式中的 π_1 与 π_2 代入其中，得

$$\begin{aligned} \varLambda_{(1,0)} &= \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}, \\ \varLambda_{(0,1)} &= -\varLambda_{(1,0)} = \left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{6.337}$$

各单权都是秩 $r=2$ 维空间的矢量，有两个分量. 粒子物理中，第 1 分量 $\varLambda_1$ 通常取成同位旋的第 3 分量 I_3，第 2 分量 $\varLambda_2$ 取成超核 Y，并且有关系

$$I_3=\varLambda_1,\quad Y=\frac{2}{\sqrt{3}}\varLambda_2. \tag{6.338}$$

这样，在 (I_3,Y) 权空间中，基础表示 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 的单权系变为

$$\begin{aligned}\varLambda_{(1,0)}&=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(0,-\frac{2}{3}\right)\right\},\\ \varLambda_{(0,1)}=-\varLambda_{(1,0)}&=\left\{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right),\left(0,\frac{2}{3}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{6.339}$$

注意到

$$I_3=Q-\frac{Y}{2},\quad Y=b+S, \tag{6.340}$$

其中 Q、b 与 S 分别为夸克的电荷、重子数与奇异数 (参见表 6.2)，则 u、d、s 三夸克的 I_3 与超荷 Y 分别为

$$u\left(I_3,Y\right)=u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\ d\left(I_3,Y\right)=d\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\ s\left(I_3,Y\right)=s\left(0,-\frac{2}{3}\right). \tag{6.341}$$

这样，$A_2\left[SU(3)\right]$ 李代数基础表示的单权系可由夸克表示成

$$\begin{aligned}\varLambda_{(1,0)}&=\{u,d,s\},\\ \varLambda_{(0,1)}&=-\varLambda_{(1,0)}=\left\{\bar{u},\bar{d},\bar{s}\right\},\end{aligned} \tag{6.342}$$

分别是 $A_2\left[SU(3)\right]$ 李代数的 3 维与 $\bar{3}$ 维不可约表示的单权系 [参见 (6.311) 式]，其权图如图 6.31 所示.

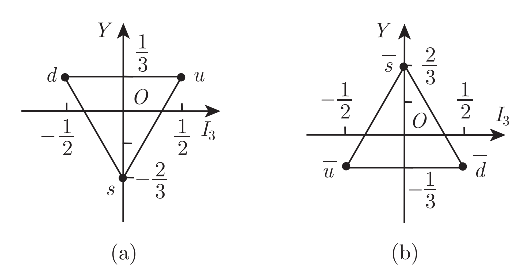


图 6.31 $A_2\left[SU(3)\right]$ 两基础表示的权图

(a)$\varLambda_{(1,0)}$; (b) $\varLambda_{(0,1)}$

相应的本征态为

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&\left|I=1/2,I_3=1/2,Y=1/3\right\rangle=u,\\&\left|I=1/2,I_3=-1/2,Y=1/3\right\rangle=d,\end{aligned}\right.\quad\text{同位旋二重态},\\ &\left|I=0,I_3=0,Y=-2/3\right\rangle=s,\text{同位旋单态}.\end{aligned} \tag{6.343}$$

按 (6.270) 式，$A_2\,[SU\,(3)]$ 李代数任一表示的单权系都可由其基础表示的单权系线性组合而成. 由于夸克是构成物质的最小单元，换成物理语言，这一数学结论就可以说成：任一强子都可由夸克组合而成，具有一定的权，属于确定的单权系，处在 $A_2\,[SU\,(3)]$ 李代数权图的一个确定的点上，所以强子具有 $SU\,(3)$ 对称性. 由于构成该 $SU\,(3)$ 群的基础表示是味夸克 u、d、s 及其反夸克 $\bar{u}$、$\bar{d}$、$\bar{s}$，习惯上称这种对称性为 $SU\,(3)$ 味道对称性.

6.8.6　介子的 $SU(3)$ 味道对称性

介子由夸克与反夸克组成，有了 $A_2\,[SU\,(3)]$ 李代数基础表示单权系的夸克表示 (6.342) 式，就可将介子与 $A_2\,[SU\,(3)]$ 李代数的表示联系起来，给出由介子填充的权图.

由 (4.175b) 式知

$$3\otimes\bar{3}=8\oplus 1,$$

即基础表示 $(1,0)$ 与 $(0,1)$ 的直积是 8 维与 1 维不可约表示的直和. 按定理 6.12，由 (6.342) 式可得单权系

$$A_{(1,0)\otimes(0,1)}=\left\{u\bar{u},u\bar{d},u\bar{s},d\bar{u},d\bar{d},d\bar{s},s\bar{u},s\bar{d},s\bar{s}\right\},\tag{6.344}$$

共有 9 个单权，其中 $(I_3,Y)=(0,0)$ 的单权有 $u\bar{u}$、$d\bar{d}$ 与 $s\bar{s}$ 三种夸克组合 (简并度为 3)，其他 6 个单权，各有不同的夸克组合，它们分别填充在 8 维与 1 维不可约表示的权图上，如图 6.32 所示. 图中同时还标出了各单权所对应的基态介子，括号内介子的自旋为 0，括号外的为 1，两者具有相同形式的夸克组合或味道. 这里值得一提的是，组成介子的正反夸克，其自旋 $s=1/2$(见表 6.2)，所以介子的自旋只能取 0 或 1，自旋波函数由 (5.176) 式描述.

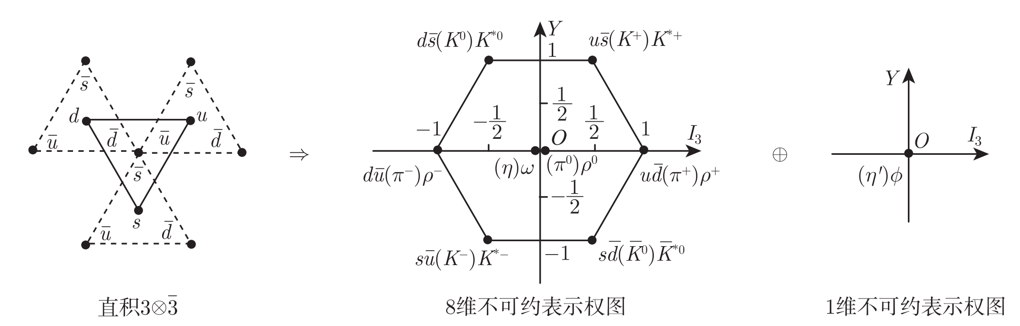


图 6.32　$A_2\,[SU\,(3)]$ 基础表示直积 $3\otimes\bar{3}$ 的权图与填充的基态介子. 括号内介子的自旋为 0，括号外的为 1

由图 6.32 知，$\pi^0\pi^\pm$ 或 $\rho^0\rho^\pm$ 组成同位旋为 1 的三重态，它们的味道波函数与 (6.333) 式相同，为

$$
\begin{aligned}
&(\pi^+)\,\rho^+ = u\bar{d},\\
&\left(\pi^0\right)\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} - d\bar{d}\right),\\
&(\pi^-)\,\rho^- = d\bar{u}.
\end{aligned}
\tag{6.345}
$$

同位旋为 1/2 的奇异介子的味道波函数与单权系 (6.344) 式中各相应单权的夸克组合形式相同，即

$$
\begin{aligned}
&(K^+)\,K^{*+} = u\bar{s}, \quad \left(K^0\right)K^{*0} = d\bar{s},\\
&\left(\bar{K}^0\right)\bar{K}^{*0} = s\bar{d}, \quad (K^-)\,K^{*-} = s\bar{u}.
\end{aligned}
\tag{6.346}
$$

图中 $(\eta)\,\omega$ 与 $(\eta')\,\phi$ 的 $(I_3, Y) = (0,0)$，按上所述，它们应是 $u\bar{u}$、$d\bar{d}$ 与 $s\bar{s}$ 的线性组合. η' 为一味单态，它的味道波函数为

$$
\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right). \tag{6.347}
$$

另由正交性知，η 的味道波函数应为

$$
\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\right). \tag{6.348}
$$

对于自旋为 1 的无味介子 ϕ 与 ω，它们的味道波函数与 (6.347)、(6.348) 两式有所不同. 实验表明，二者取形式

$$
\phi \approx s\bar{s}, \quad \omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} + d\bar{d}\right). \tag{6.349}
$$

另外，还有许多其他处于激发态的介子也是由 u、d、s 及其反夸克组成的，它们都可填充在如图 6.32 所示的 $A_2\,[SU\,(3)]$ 李代数的 8 维与 1 维不可约表示的权图上，且其味道波函数与 (6.345)~(6.349) 式相同，这在粒子物理教材或粒子性质与数据手册中都可查到，这里就不罗列了. 所以，由 uds 及其反夸克构成的介子确实具有漂亮的 $SU\,(3)$ 味道对称性，后面将会看到，重子也具有这样的对称性. 实际上，正是基于这样的对称性，美国物理学家盖尔曼与茨韦格 (Zweig) 于 1964 年首次提出了强子的夸克结构假说.

6.8.7 重子的 $SU(3)$ 味道对称性

1. 重子的 $SU\,(3)$ 味道对称性

重子由三个夸克组成，由 $A_2\,[SU\,(3)]$ 李代数基础表示的单权系 (6.342) 式，同样可建立起重子与 $A_2\,[SU\,(3)]$ 李代数表示之间的联系，得到由重子填充的权图.

由 (4.177b) 式知

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1,$$

表明三重基础表示 $(1,0)$ 的直积可分解为 10 维、两个 8 维及 1 维不可约表示的直和. 另由 (4.176b) 式知

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3},$$

表明两基础表示 $(1,0)$ 的直积是 6 维与 $\bar{3}$ 维不可约表示的直和. 按定理 6.12，由 (6.342) 式可得单权系

$$\Lambda_{(1,0)\otimes(1,0)} = \{uu, ud, us, du, dd, ds, su, sd, ss\}\,, \tag{6.350}$$

共 9 个单权，其中 ud 与 du 有相同的权值 $(I_3, Y) = (0, 2/3)$，us 与 su 有相同的权值 $(1/2, -1/3)$，ds 与 sd 有相同的权值 $(-1/2, -1/3)$，按上所述，这 6 个单权的本征态分别是权值相同的夸克组合的线性组合，且由 (6.332) 式知，单态是反对称波函数. 由此可得权系 (6.350) 式的权图，如图 6.33 所示，图中各单权用其本征态表示，其中的 $\left[uu, (ud+du)/\sqrt{2}, dd\right]$ 构成同位旋为 1 的对称三重态[参见 (6.332) 式]，$(ud-du)/\sqrt{2}$ 是其相应的同位旋为 0 的反对称单态. 图中其他各单权的波函数可按类似的方法得到.

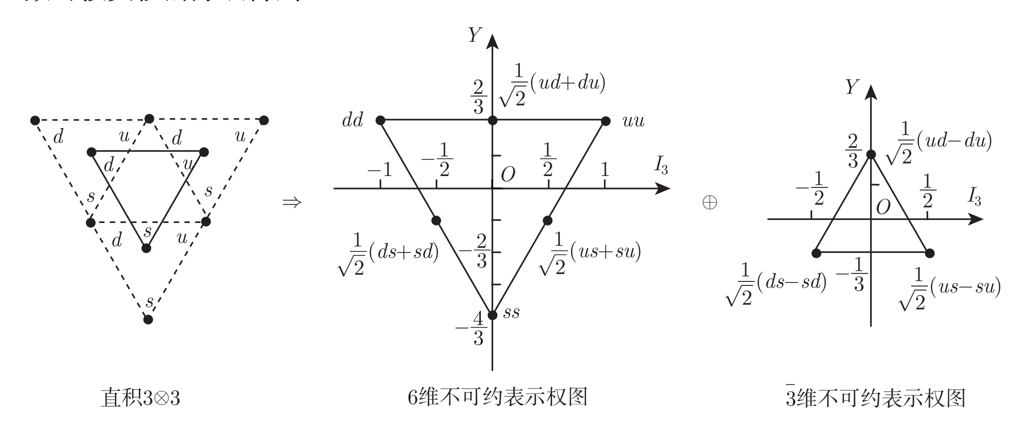


图 6.33　$A_2\,[SU\,(3)]$ 基础表示直积 $3 \otimes 3$ 的权图

由于

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = 6 \otimes 3 \oplus \bar{3} \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1,$$

相应的单权系由 27 个单权组成，按定理 6.12，可由 (6.342) 与 (6.350) 式简单地求出，这里就不罗列了. 相应的权图可在图 6.33 的基础上，再直积 3 维权图得到，结果如图 6.34 所示.

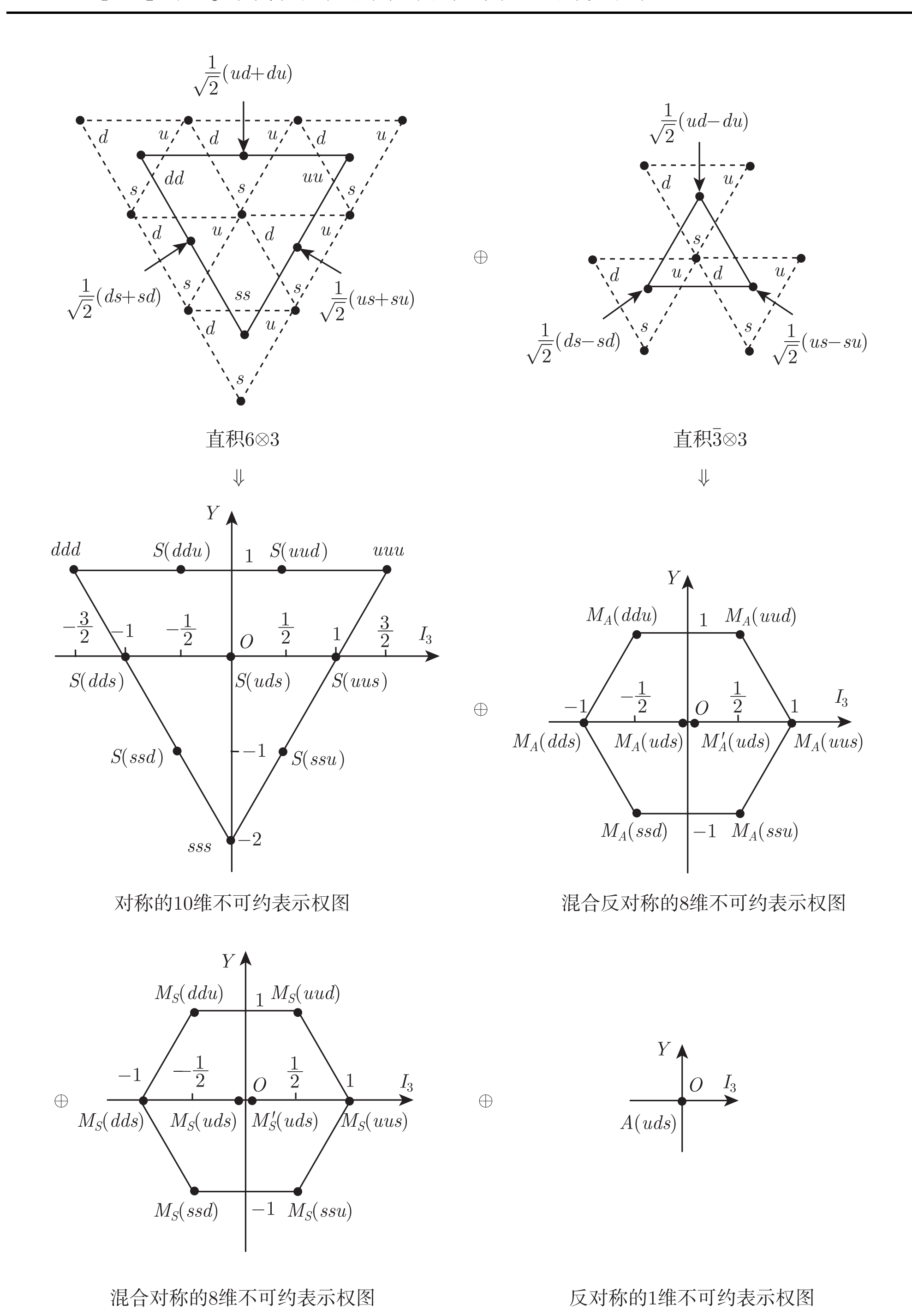


图 6.34　$A_2\,[SU\,(3)]$ 三重基础表示直积 $3\otimes3\otimes3$ 的权图

图中各单权用其本征态表示. 其中的 $S\,(ddu)$、$S\,(uud)$、$M_A(ddu)$、$M_A(uud)$、$M_S(ddu)$ 与 $M_S(uud)$ 已由 (6.334)~(6.336) 式给出. 由与这些波函数相同的求法，可得图中其他波函数，结果为

$$\begin{cases} S\,(dds) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[dds + (ds+sd)\,d\right],\ M_A\,(dds) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(ds-sd)\,d, \\ M_S\,(dds) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(ds+sd)\,d - 2dds\right]. \end{cases} \tag{6.351}$$

$$\begin{cases} S\,(uus) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[uus + (us+su)\,u\right],\ M_A\,(uus) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(us-su)\,u, \\ M_S\,(uus) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(us+su)\,u - 2uus\right]. \end{cases} \tag{6.352}$$

$$\begin{cases} S(ssd) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ssd + (ds+sd)\,s\right],\ M_A\,(ssd) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(ds-sd)\,s, \\ M_S\,(ssd) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(ds+sd)\,s - 2ssd\right]. \end{cases} \tag{6.353}$$

$$\begin{cases} S\,(ssu) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ssu + (us+su)\,s\right],\ M_A\,(ssu) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(us-su)\,s, \\ M_S\,(ssu) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(us+su)\,s - 2ssu\right]. \end{cases} \tag{6.354}$$

$$\begin{cases} S\,(uds) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(ds+sd)\,u + (us+su)\,d + (ud+du)\,s\right], \\ M_A\,(uds) = \dfrac{1}{2}\left[(ds-sd)\,u + (us-su)\,d\right], \\ M_S\,(uds) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[(ds+sd)\,u + (us+su)\,d - 2\,(ud+du)\,s\right]. \end{cases} \tag{6.355a}$$

$$\begin{cases} M'_A\,(uds) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[(ds-sd)\,u - (us-su)\,d - 2\,(ud-du)\,s\right], \\ M'_S\,(uds) = \dfrac{1}{2}\left[(ds+sd)\,u - (us+su)\,d\right]. \end{cases} \tag{6.355b}$$

$$A\,(uds) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(uds - usd + sud - sdu + dsu - dus)\,. \tag{6.355c}$$

以上各态彼此间正交归一，其中最后 6 项来自于 uds 的 6 种不同组合都有权值 $(I_3, Y) = (0, 0)$ 的结果，各单权的本征态都是 uds 不同组合的线性组合，只不过表示不同，线性组合的形式不同，其中的 $A\,(uds)$ 对于三夸克 uds 的交换是反对称的.

权图 6.34 包括了所有可能的 uds 组合与所处的状态，所以由 uds 三味夸克组成的重子将全部处在该权图上，具有 $SU\,(3)$ 味道对称性.

2. 基态重子的权图

相对于介子的味道波函数 (6.345)~(6.349) 式，重子的味道波函数 (6.351)~(6.355) 式要复杂得多，不但形式复杂，还有对称、反对称、混合对称与混合反对称之分. 在实际问题中，不同形式波函数的具体采用将受制于 (6.317) 式中其他三种波函数的形式. 这里将以基态重子为例对该问题作以讨论.

由表 6.2 知，夸克是自旋为 1/2 的费米子，所以由 3 个夸克构成的自旋波函数，可由同位旋为 1/2 的 3 个 $q_I(u,d)$ 夸克构成的同位旋波函数 (6.334)~(6.336) 式，作代换

$$u\,(\text{或}d) \Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\,(\text{或}u) \Rightarrow \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.356}$$

得到. 由 (6.334) 式的代换得

$$\chi(S) = \begin{cases} |s=3/2, s_3=3/2\rangle = \alpha\alpha\alpha, \\ |s=3/2, s_3=1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\alpha\alpha\beta+\alpha\beta\alpha+\beta\alpha\alpha), \\ |s=3/2, s_3=-1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\beta\beta\alpha+\alpha\beta\beta+\beta\alpha\beta), \\ |s=3/2, s_3=-3/2\rangle = \beta\beta\beta, \end{cases} \tag{6.357}$$

是自旋为 $s=3/2$ 的对称 4 重态. 由 (6.335) 式的代换得

$$\chi(M_A) = \begin{cases} |s=1/2, s_3=1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta\alpha-\beta\alpha\alpha), \\ |s=1/2, s_3=-1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta\beta-\beta\alpha\beta), \end{cases} \tag{6.358a}$$

或

$$\chi(M_A) = \begin{cases} |s=1/2, s_3=1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta\alpha\alpha-\alpha\beta\alpha), \\ |s=1/2, s_3=-1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta\alpha\beta-\alpha\beta\beta), \end{cases} \tag{6.358b}$$

是自旋 $s=1/2$ 的混合反对称 2 重态. 由 (6.336) 式的代换得

$$\chi(M_S) = \begin{cases} |s=1/2, s_3=1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\beta\alpha\alpha+\alpha\beta\alpha-2\alpha\alpha\beta), \\ |s=1/2, s_3=-1/2\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\alpha\beta\beta+\beta\alpha\beta-2\beta\beta\alpha), \end{cases} \tag{6.359}$$

是自旋 $s=1/2$ 的混合对称 2 重态. 这样，重子的味道 $\times$ 自旋波函数为

$$\overset{SU(3)}{(\underset{S}{10}\oplus\underset{M_A}{8}\oplus\underset{M_S}{8}\oplus\underset{A}{1})}\times\overset{SU(2)}{(\underset{\chi(S)}{4}\oplus\underset{\chi(M_A)}{2}\oplus\underset{\chi(M_S)}{2})}, \tag{6.360}$$

它们按对称性可分为

$$\begin{array}{llll} S:(10,\ 4) & + & (8,\ 2)\,, & \\ \quad S\ \ \chi(S) & & M_A\chi(M_A)+M_S\chi(M_S)\,, & \text{对称态}. \end{array} \tag{6.361}$$

$$\begin{array}{lllllll} M_A:(10,\ 2) & + & (8,\ 4) & + & (8,\ 2) & + & (1,\ 2)\,, \\ \quad S\ \ \chi(M_A) & & M_A\ \chi(S) & & M_S\ \chi(M_A) & & A\ \chi(M_S)\,, \end{array}\ \text{混合反对称态}. \tag{6.362}$$

$$\begin{array}{lllllll} M_S:(10,\ 2) & + & (8,\ 4) & + & (8,\ 2) & + & (1,\ 2)\,, \\ \quad S\ \chi(M_S) & & M_S\ \chi(S) & & M_S\ \chi(M_S) & & A\ \chi(M_A)\,, \end{array}\ \text{混合对称态}. \tag{6.363}$$

$$\begin{array}{lll} A:(1,\ 4) & + & (8,\ 2)\,, \\ \quad A\ \chi(S) & & M_A\ \chi(M_S)-M_S\chi(M_A)\,, \end{array}\ \text{反对称态}. \tag{6.364}$$

由 (6.361)~(6.364) 式知，给定权图上的一定夸克组合，其自旋取值将随着味道 × 自旋波函数对称性的不同而不同，而味道 × 自旋波函数对称性的选取又受制于 (6.317) 式中的时空与颜色波函数.

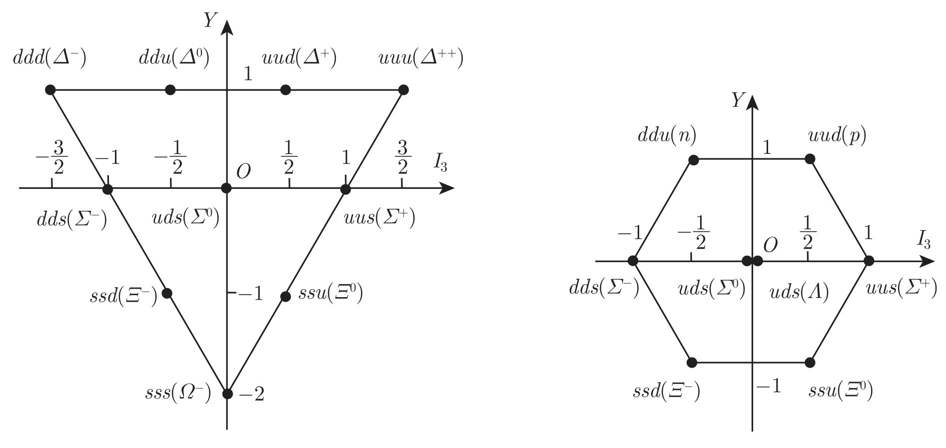
理论与实验研究都表明，夸克有红 (R)、绿 (G)、蓝 (B) 三种颜色，而重子是色单态的，它们应处在 $SU(3)$ 色群 1 维不可约表示的权图上，所以类似于 (6.355c) 式，重子的颜色波函数应为

$$A_{\text{色单态}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(RGB-RBG+BRG-BGR+GBR-GRB\right), \tag{6.365}$$

上式对于 RGB 的交换是反对称的.

由于夸克是自旋为 1/2 的费米子，对于任意两夸克的交换，重子波函数是反对称的. 由颜色波函数 (6.365) 式的反对称性知，(6.317) 式中的时空波函数 × 味道波函数 × 自旋波函数应是对称的. 对于基态重子，其轨道角动量 $L=0$，所以其时空波函数是对称的，因此基态重子的味道波函数 × 自旋波函数应是对称的，亦即它们应具有 (6.361) 式的形式. 这样，自旋为 3/2 的基态重子应填充在 $A_2\left[SU(3)\right]$ 的 10 维不可约表示的权图上，而自旋为 1/2 的基态重子处在 8 维权图上，如图 6.35 所示. 而处于激发态的重子，其味道波函数与轨道角动量量子数有关，它们应按时空波函数 × 味道波函数 × 自旋波函数对于夸克的交换是对称的要求来确定.

由图 6.35 可以看出，同一夸克组合的重离子，由于处在不同的权图上，其自旋可以不同. 同样，由上面的分析知，维数一定的权图上的重子，由于所处激发态的不同，其自旋也可以不同 [参见 (6.361)~(6.364) 式].



(a) 自旋为3/2的基态重子填充的10维不可约表示权图 (b) 自旋为1/2的基态重子填充的8维不可约表示权图

图 6.35 基态重子填充的 $A_2\,[SU\,(3)]$10 维与 8 维不可约表示权图

例 6.27 基态重子 $\varDelta^+$ 与 $\varDelta^{++}$ 的味道 × 自旋波函数.

$\varDelta^+$ 与 $\varDelta^{++}$ 都是自旋为 3/2 的重子，由上面的讨论与 (6.361) 式知，其基态的味道 × 自旋波函数为

$$\begin{matrix} (10, & 4), \\ S & \chi\,(S)\,. \end{matrix} \tag{6.366}$$

其味道与自旋波函数都是对称的. 由图 6.35 知，$\varDelta^+$ 由 uud 夸克组成，其味道波函数由 (6.334) 式给出，自旋波函数由 (6.357) 式给出. 若取 $\varDelta^+$ 的 $s_3=3/2$，则

$$|\varDelta^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\,(uud+udu+duu)\,\alpha\alpha\alpha. \tag{6.367}$$

由图 6.35 知，$\varDelta^{++}$ 由 uuu 夸克组成，其味道与自旋波函数也分别由 (6.334) 与 (6.357) 式给出，若取其 $s_3=3/2$，则

$$|\varDelta^{++}>=uuu\alpha\alpha\alpha. \tag{6.368}$$

同样的方法可讨论 s_3 做其他取值时 $\varDelta^+$ 与 $\varDelta^{++}$ 的味道 × 自旋波函数，也可求得 $s=3/2$ 的任意其他重子的味道 × 自旋波函数，有兴趣的读者可自求之.

例 6.28 基态质子 p 与中子 n 的味道 × 自旋波函数.

p 与 n 都是自旋为 1/2 的重子，由上面的讨论与 (6.361) 式知，基态 p 与 n 的味道 × 自旋波函数为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}[(8, \quad\ 2) \quad\ \ + \quad (8, \quad 2)], \\
&\quad\ M_A\ \chi(M_A) \quad + \quad M_S\ \chi(M_S),
\end{aligned} \tag{6.369}
$$

相乘的味道与自旋波函数或同为混合反对称的或同为混合对称的. 由图 6.35 知，p 由 uud 三夸克组成，味道波函数 M_A 与 M_S 分别由 (6.335) 与 (6.336) 式给出，自旋波函数 $\chi\,(M_A)$ 与 $\chi\,(M_S)$ 分别由 (6.358a) 与 (6.359) 式给出. 假设 p 的 $s_3 = 1/2$，将各波函数代入 (6.369) 式得

$$
\begin{aligned}
|p\rangle = &\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,(ud - du)\,u\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\alpha\beta\alpha - \beta\alpha\alpha)\right. \\
&\left.+\frac{1}{\sqrt{6}}\,[(ud + du)\,u - 2uud]\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,(\beta\alpha\alpha + \alpha\beta\alpha - 2\alpha\alpha\beta)\right\},
\end{aligned}
$$

整理得

$$
\begin{aligned}
|p\rangle = &\frac{1}{3\sqrt{2}}\,[udu\,(2\alpha\beta\alpha - \alpha\alpha\beta - \beta\alpha\alpha) + duu\,(2\beta\alpha\alpha - \alpha\beta\alpha - \alpha\alpha\beta) \\
&+ uud(2\alpha\alpha\beta - \beta\alpha\alpha - \alpha\beta\alpha)],
\end{aligned} \tag{6.370}
$$

由上式可以看出，对于任意两夸克的交换 (注：圆括号内的相应自旋波函数也要做相同的交换)，上式形式不变. 所以 (6.370) 或 (6.369) 式是一对称波函数.

由图 6.35 知，中子 n 由 ddu 夸克组成，其味道波函数 M_A 与 M_s 分别由 (6.335) 与 (6.336) 式给出，自旋波函数 $\chi\,(M_A)$ 与 $\chi\,(M_S)$ 分别由 (6.358b) 与 (6.359) 式给出，仍讨论 $s_3 = 1/2$ 的情况，将各波函数代入 (6.369) 式得

$$
\begin{aligned}
|n\rangle = &\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\,(ud - du)\,d\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\beta\alpha\alpha - \alpha\beta\alpha)\right. \\
&\left.+\frac{1}{\sqrt{6}}\,[(ud + du)\,d - 2ddu]\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,(\beta\alpha\alpha + \alpha\beta\alpha - 2\alpha\alpha\beta)\right\},
\end{aligned}
$$

整理得

$$
\begin{aligned}
|n\rangle = &\frac{1}{3\sqrt{2}}\,[dud\,(2\alpha\beta\alpha - \alpha\alpha\beta - \beta\alpha\alpha) + udd\,(2\beta\alpha\alpha - \alpha\beta\alpha - \alpha\alpha\beta) \\
&+ddu\,(2\alpha\alpha\beta - \beta\alpha\alpha - \alpha\beta\alpha)]\,,
\end{aligned} \tag{6.371}
$$

为对称波函数，与 (6.370) 式相比，只需做变换 $u \Leftrightarrow d$，可由一式得到另一式.

同样的方法可讨论 $s_3 = -1/2$ 的情况，也可求得 $s = 1/2$ 的任意其他重子的味道 $\times$ 自旋波函数，有兴趣的读者可自求之.

例 6.29　质子 p 与中子 n 的反对称味道 $\times$ 自旋波函数.

由 (6.364) 式知，p 与 n 的反对称味道 $\times$ 自旋波函数为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}[(8, \quad 2) \quad - \quad (8, \quad 2)],\\ &M_A\,\chi\,(M_S) \;-\; M_S\;\chi\,(M_A)\,,\end{aligned} \tag{6.372}$$

如上所述，对于质子 p，味道波函数 M_A 与 M_s 分别由 (6.335) 与 (6.336) 式给出，$\chi\,(M_A)$ 与 $\chi\,(M_s)$ 分别由 (6.358a) 与 (6.359) 式给出，对于 $s_3=1/2$ 的情况，将各波函数代入 (6.372) 式得

$$\begin{aligned}|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{&\frac{1}{\sqrt{2}}\,(ud-du)\,u\frac{1}{\sqrt{6}}\,(\beta\alpha\alpha+\alpha\beta\alpha-2\alpha\alpha\beta)\\ &-\frac{1}{\sqrt{6}}\,[(ud+du)\,u-2uud]\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\alpha\beta\alpha-\beta\alpha\alpha)\Big\},\end{aligned}$$

整理得

$$|p>=\frac{1}{\sqrt{6}}\,[uud\,(\alpha\beta\alpha-\beta\alpha\alpha)+udu\,(\beta\alpha\alpha-\alpha\alpha\beta)+duu\,(\alpha\alpha\beta-\alpha\beta\alpha)]\,. \tag{6.373}$$

上式中，对于任意两夸克的交换 (注：对应自旋波函数也要做相应的交换)，出现一负号，所以 (6.373) 或 (6.372) 式是一反对称波函数.

对于中子 n，做同样的讨论得

$$|n>=\frac{1}{\sqrt{6}}\,[ddu\,(\beta\alpha\alpha-\alpha\beta\alpha)+dud\,(\alpha\alpha\beta-\beta\alpha\alpha)+udd\,(\alpha\beta\alpha-\alpha\alpha\beta)] \tag{6.374}$$

是一反对称波函数. 与 (6.373) 式相比较知，当做代换 $u\Leftrightarrow d$，可由一式得到另一式 (相差一可忽略的负号).

6.8.8 粲夸克与强子的 $SU(4)$ 味道对称性

1974 年，美籍华裔物理学家丁肇中与美国物理学家 B. 里克特 (Burton Richter) 各自独立地在实验上发现了 J/ψ 粒子，该粒子是粲夸克 c 与反粲夸克 $\bar{c}$ 的束缚态，从而使夸克的数目增加到了 4 个，这时的超荷应变为

$$Y=b+S+C. \tag{6.375}$$

其中 C 为粲数 (见表 6.2). 由 $udsc$ 四夸克，可构成 $A_3\,[SU\,(4)]$ 基础表示的单权系

$$\begin{aligned}&\Lambda_{(1,0,0)}=\{u,d,s,c\}\,,\\ &\Lambda_{(0,0,1)}=-\Lambda_{(1,0,0)}=\left\{\bar{u},\bar{d},\bar{s},\bar{c}\right\},\end{aligned} \tag{6.376}$$

二者分别是 $A_3\,[SU\,(4)]$ 李代数的 4 维与 $\bar{4}$ 维不可约表示的单权系 [参见 (4.172) 式]，在 (I_3,Y',C) 的 3 维权空间中的权图如图 6.36 所示，其中的 $Y'=Y-4C/3$.

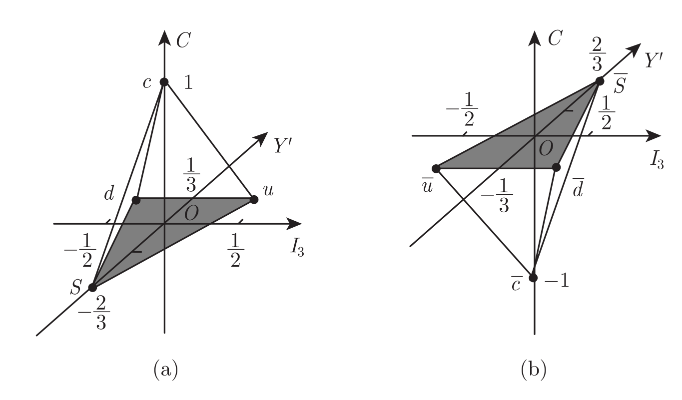


图 6.36　$A_3\,[SU\,(4)]$ 两基础表示的权图

(a)4 维;(b)$\bar{4}$ 维

由该权图，类似于前面的讨论，可得由强子填充的 $A_3\,[SU\,(4)]$ 表示的权图.

1. 介子的 $SU\,(4)$ 味道对称性

由 (4.180b) 式知

$$4\otimes\bar{4}=15\oplus 1,$$

即考虑到 c 夸克后，夸克与反夸克的不同组合应填充在 $A_3\,[SU\,(4)]$ 的 15 维与 1 维不可约表示的权图上. 利用图 6.36，按照 6.8.6 节中所采用的方法，容易得到权图 6.37，图中同时还标出了各权所对应的基态介子，左图介子的自旋为 0，右图的为 1. 图中的

$$\eta_c\,(J/\psi)=c\bar{c}, \tag{6.377}$$

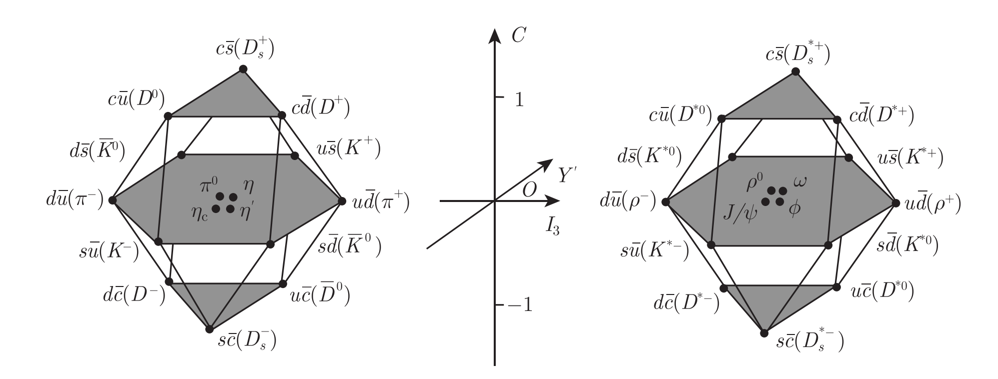


图 6.37　基态介子填充的 $A_3\,[SU\,(4)]\,15\oplus 1$ 维不可约表示权图

是由 $c\bar{c}$ 构成的味单态，它们应处在 1 维权图上，这里为简单起见，将二者都放在 15 维权图上. I_3OY' 平面上其他介子的味道波函数已由 (6.345)~(6.349) 式给出，处在 $c=\pm1$ 两平面上的介子，其权值各不相同，所以如前所述，各介子的味道波函数与权图上的夸克组合相同.

2. 重子的 $SU(4)$ 味道对称性

由 (4.182b) 式知

$$\begin{array}{c} 4\otimes4\otimes4=20\oplus20\oplus20\oplus\bar{4}, \\ \qquad\qquad\quad S\quad\ M_A\ \ M_S\ \ A. \end{array} \tag{6.378}$$

所以考虑到 c 夸克后，三夸克的不同组合应填充在 $A_3[SU(4)]$ 的 20 维与 $\bar{4}$ 维不可约表示的权图上，不同表示中的味道波函数的对称性如 (6.378) 式示，如前所述，重子的味道波函数有对称、反对称、混合对称与混合反对称之分，这些味道波函数与自旋波函数构成的味道 $\times$ 自旋波函数的对称性如 (6.361)~(6.364) 式所示. 按上面的分析，基态重子的味道 $\times$ 自旋波函数应为对称波函数，即

$$\begin{array}{ccccc} (20, & 4) & + & (20, & 2)\,, \\ S & \chi(S) & & M_A\chi(M_A) & +M_S\chi(M_S)\,, \end{array} \tag{6.379}$$

即考虑了 c 夸克后，基态重子应分别填充在自旋各为 3/2 与 1/2 的两个 20 维的权图上. 利用图 6.36，按照 6.8.7 节中所采用的方法，可得权图 6.38. 图中 I_3OY' 平

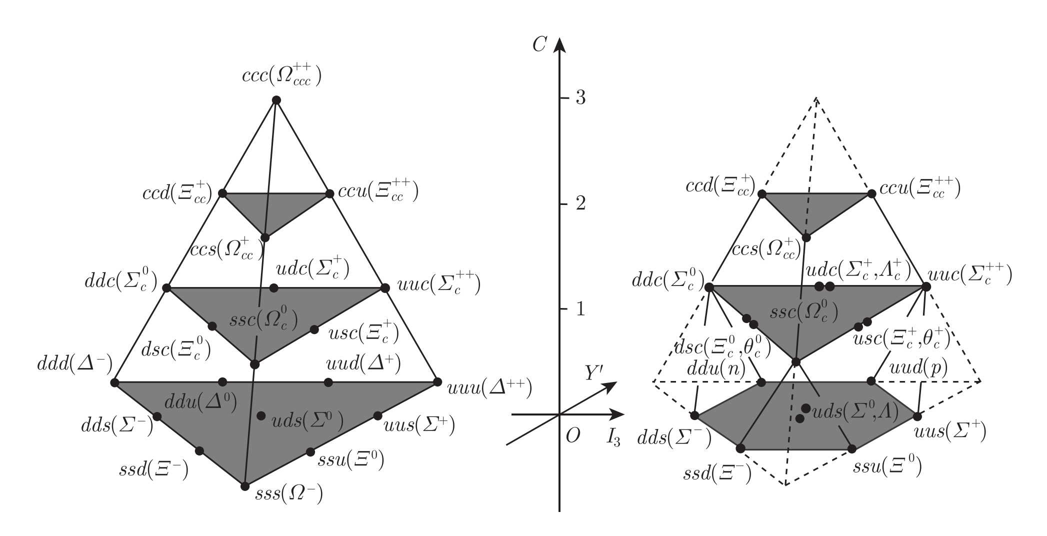


图 6.38　基态重子填充的 $A_3[SU(4)]$20 维不可约表示权图

面内各重子的不同味道波函数已由 (6.334)~(6.336) 式与 (6.351)~(6.355) 式给出，新增的含 c 夸克重子的对称、反对称、混合对称与混合反对称的味道波函数可用类似的方法求得，结果为

$$\begin{cases} S\left(ccd\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ccd+\left(cd+dc\right)c\right],\ M_A\left(ccd\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(cd-dc\right)c, \\ M_S\left(ccd\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(cd+dc\right)c-2ccd\right]. \end{cases} \tag{6.380}$$

$$\begin{cases} S\left(ccs\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ccs+\left(cs+sc\right)c\right],\ M_A\left(ccs\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(cs-sc\right)c, \\ M_S\left(ccs\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(cs+sc\right)c-2ccs\right]. \end{cases} \tag{6.381}$$

$$\begin{cases} S\left(ccu\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ccu+\left(cu+uc\right)c\right],\ M_A\left(ccu\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(cu-uc\right)c, \\ M_S\left(ccu\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(cu+uc\right)c-2ccu\right]. \end{cases} \tag{6.382}$$

$$\begin{cases} S\left(ddc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ddc+\left(cd+dc\right)d\right],\ M_A\left(ddc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(cd-dc\right)d, \\ M_S\left(ddc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(cd+dc\right)d-2ddc\right]. \end{cases} \tag{6.383}$$

$$\begin{cases} S\left(ssc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[ssc+\left(sc+cs\right)s\right],\ M_A\left(ssc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(sc-cs\right)s, \\ M_S\left(ssc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(sc+cs\right)s-2ssc\right]. \end{cases} \tag{6.384}$$

$$\begin{cases} S\left(uuc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[uuc+\left(cu+uc\right)u\right],\ M_A\left(uuc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(cu-uc\right)u, \\ M_S\left(uuc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}[\left(cu+uc\right)u-2uuc]. \end{cases} \tag{6.385}$$

$$\begin{cases} S\left(dsc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(sd+ds\right)c+\left(sc+cs\right)d+\left(cd+dc\right)s\right], \\ M_A\left(dsc\right)=\dfrac{1}{2}\left[\left(sd-ds\right)c+\left(sc-cs\right)d\right], \\ M_S\left(dsc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[\left(sd+ds\right)c+\left(sc+cs\right)d-2\left(cd+dc\right)s\right]. \end{cases} \tag{6.386a}$$

$$\begin{cases} M'_A\left(dsc\right)=\dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[\left(sd-ds\right)c-\left(sc-cs\right)d-2\left(cd-dc\right)s\right], \\ M'_S\left(dsc\right)=\dfrac{1}{2}\left[\left(sd+ds\right)c-\left(sc+cs\right)d\right]. \end{cases} \tag{6.386b}$$

$$A\left(dsc\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(dsc-dcs+cds-csd+scd-sdc\right). \tag{6.386c}$$

$$\begin{cases} S(usc) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(su+us)c+(sc+cs)u+(uc+cu)s\right], \\ M_A(usc) = \dfrac{1}{2}\left[(su-us)c+(sc-cs)u\right], \\ M_S(usc) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[(su+us)c+(sc+cs)u-2(uc+cu)s\right]. \end{cases} \tag{6.387a}$$

$$\begin{cases} M'_A(usc) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[(su-us)c-(sc-cs)u-2(uc-cu)s\right], \\ M'_S(usc) = \dfrac{1}{2}\left[(su+us)c-(sc+cs)u\right]. \end{cases} \tag{6.387b}$$

$$A(usc) = \frac{1}{\sqrt{6}}(usc-ucs+cus-csu+scu-suc). \tag{6.387c}$$

$$\begin{cases} S(udc) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left[(dc+cd)u+(du+ud)c+(cu+uc)d\right], \\ M_A(udc) = \dfrac{1}{2}\left[(dc-cd)u+(du-ud)c\right], \\ M_S(udc) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[(dc+cd)u+(du+ud)c-2(cu+uc)d\right]. \end{cases} \tag{6.388a}$$

$$\begin{cases} M'_A(udc) = \dfrac{1}{\sqrt{12}}\left[(dc-cd)u-(du-ud)c-2(cu-uc)d\right], \\ M'_S(udc) = \dfrac{1}{2}\left[(dc+cd)u-(du+ud)c\right]. \end{cases} \tag{6.388b}$$

$$A(udc) = \frac{1}{\sqrt{6}}(udc-ucd+cud-cdu+dcu-duc). \tag{6.388c}$$

可见，由 $A_2[SU(3)]$ 与 $A_3[SU(4)]$ 李代数基础表示单权系的夸克表示，可方便地画出由强子填充的各不可约表示的权图，得到各种强子的味道波函数，揭示它们的味道对称性. 介子的自旋为 0 或 1，是玻色子，仅有一套味道波函数；重子的自旋为 1/2 或 3/2，是费米子，有对称、反对称、混合对称与混合反对称四套味道波函数，这些波函数是进一步讨论强子波函数及其性质的基础.

索　　引

P

Q

S

T

W

X

Y

Z

其他

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何(第二版)	侯伯元,侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论(第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树,等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论(上册·第二版)	梁灿彬,周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论(第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计(第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	何 琳 等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学(第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学(第二版)	杨训仁,陈宇 著	2007.06
14. 输运理论(第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学(第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论(第二版)	刘 辽 等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元 等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡,李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册·第二版)	梁灿彬,周彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03

27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(下册·第二版)	梁灿彬，周彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04
31. 高等结构动力学(第二版)	李东旭 著	2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版·上、下册)	梁敬魁 编著	2011.03
33. 量子计算与量子信息原理 ——第一卷：基本概念	Giuliano Benenti 等 著 王文阁，李保文 译	2011.03
34. 近代晶体学(第二版)	张克从 著	2011.05
35. 引力理论(上、下册)	王永久 著	2011.06
36. 低温等离子体 ——等离子体的产生、工艺、问题及前景	В. М. 弗尔曼，И. М. 扎什京 编著 邱励俭 译	2011.06
37. 量子物理新进展	梁九卿，韦联福 著	2011.08
38. 电磁波理论	葛德彪，魏 兵 著	2011.08
39. 激光光谱学 ——第 1 卷：基础理论	W. 戴姆特瑞德 著 姬 扬 译	2012.02
40. 激光光谱学 ——第 2 卷：实验技术	W. 戴姆特瑞德 著 姬 扬 译	2012.03
41. 量子光学导论(第二版)	谭维翰 著	2012.05
42. 中子衍射技术及其应用	姜传海，杨传铮 编著	2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论	H. 克莱纳特 著 姜 颖 译	2012.06
44. 反常统计动力学导论	包景东 著	2012.06
45. 实验数据分析(上册)	朱永生 著	2012.06
46. 实验数据分析(下册)	朱永生 著	2012.06
47. 有机固体物理	解士杰，等 著	2012.09
48. 磁性物理	金汉民 著	2013.01
49. 自旋电子学	翟宏如，等 编著	2013.01
50. 同步辐射光源及其应用(上册)	麦振洪，等 著	2013.03

51. 同步辐射光源及其应用(下册)　麦振洪，等　著　2013.03

52. 高等量子力学　汪克林　著　2013.03

53. 量子多体理论与运动模式动力学　王顺金　著　2013.03

54. 薄膜生长（第二版）　吴自勤，等　著　2013.03

55. 物理学中的数学方法　王怀玉　著　2013.03

56. 物理学前沿——问题与基础　王顺金　著　2013.06

57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学　刘　辽，黄超光　著　2013.10

58. 经典电动力学　张锡珍，张焕乔　著　2013.10

59. 内应力衍射分析　姜传海，杨传铮　编著　2013.11

60. 宇宙学基本原理　龚云贵　著　2013.11

61. B 介子物理学　肖振军　著　2013.11

62. 量子场论与重整化导论　石康杰，等　编著　2014.06

63. 粒子物理导论　杜东生，杨茂志　著　2015.01

64. 固体量子场论　史俊杰，等　著　2015.03

65. 物理学中的群论（第三版）——有限群篇　马中骐　著　2015.03

66. 中子引发轻核反应的统计理论（第二版）　张竞上　著　2015.03

67. 自旋玻璃与消息传递　周海军　著　2015.06

68. 粒子物理学导论　肖振军，吕才典　著　2015.07

69. 量子系统的辛算法　丁培柱　编著　2015.07

70. 原子分子光电离物理及实验　汪正民　著　2015.08

71. 量子场论　李灵峰　著　2015.09

72. 原子核结构　张锡珍，张焕乔　著　2015.10

73. 物理学中的群论（第三版）——李代数篇　马中骐　著　2015.10

74. 量子场论导论　姜志进　编著　2015.12

75. 高能物理实验统计分析　朱永生　著　2016.01

76. 数学物理方程及其近似方法　程建春　著　2016.06

77. 电弧等离子体炬　M. F. 朱可夫 等 编著　2016.06
陈明周，邱励俭 译

78. 现代宇宙学　Scott Dodelson　著　2016.08
张同杰，于浩然　译

79．现代电磁理论基础 王长清，李明之 著 2017.03
80．非平衡态热力学 翟玉春 编著 2017.04
81．论理原子结构 朱颀人 著 2017.04
82．粒子物理导论（第二版） 杜东生，杨茂志 著 2017.06
83．正电子散射物理 吴奕初，蒋中英，郁伟中 编著 2017.09
84．量子光场的性质与应用 孟祥国，王继锁 著 2017.12
85．介观电路的量子理论与量子计算 梁宝龙，王继锁 著 2018.06
86．开放量子系统的电子计数统计理论 薛海斌 著 2018.12
87．远程量子态制备与操控理论 周 萍 著 2019.02
88. 群论及其在粒子物理中的应用 姜志进 著 2020.03



科学出版社互联网入口
科学数理分社
电话：(010) 64017957
Email：qianjun@mail.sciencep.com
销售分类建议：理论物理

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-063777-2

定　价：138.00 元